

Riemannsche Flächen & algebraische Kurven



D. van Straten
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg Universität
Mainz, Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
Einleitung	5
§1. Aus der Funktionentheorie	11
(1.1) Holomorphe Funktionen	11
(1.2) Meromorphe Funktionen	12
(1.3) Ordnung von Null- und Polstellen	14
(1.4) Divisoren	15
(1.5) Differentiale und Residuen	16
(1.6) Satz von MITTAG-LEFFLER	19
(1.7) Funktion mit vorgegebenen Divisor	22
(1.8) Riemannsche Abbildungssatz	24
(1.9) Harmonische Funktionen	27
(1.10) Das Dirichletsche Prinzip	32
§2 Riemannsche Flächen und algebraische Kurven	36
(2.1) Definition und erste Beispiele	36
(2.2) Holomorphe und Meromorphe Funktionen	42
(2.3) Analytische Funktionen <i>im Grossen</i>	46
(2.4) Riemannsche Fläche einer algebraischen Kurve	51
(2.5) Differentiale auf Riemannschen Flächen	60
(2.6) Holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen	63
(2.7) Verzweigte Überlagerungen	66
(2.8) Satz von Riemann-Hurwitz	69
(2.9) Die Monodromiegruppe einer verzweigten Überlagerung	72
(2.10) Überlagerung und Körpererweiterung	84
§3. Analysis auf Riemannschen Flächen	88
(3.1) Weihnachtsintermezzo	88
(3.2) Analysis auf Mannigfaltigkeiten	98
(3.3) Homologie und Kohomologie	101
(3.4) Stern-Operator und Harmonische Formen	108

(3.5) Der Fundamentalsatz	111
(3.6) Komplexe Differentialformen	114
(3.7) Satz von Riemann-Roch	117
(3.8) Der Roch-Teil von Riemann-Roch	120
(3.9) Die Perioden-Relationen	124
(3.10) Das Abelsche Theorem	128
§4. Anwendungen	134
(4.1) Umdeutung des Abelschen Theorems	134
(4.2) Linearsysteme und Einbettungen	137
(4.3) Ebene algebraische Kurven	142
(4.4) Bézout, Clebsch und Riemann	148
(4.5) Geometrie der Divisorenklassengruppe	154

Vorwort

Dieses Vorlesungsskript ist eine Ausarbeitung der Vorlesung *Riemannsche Flächen und algebraische Kurven* wie ich sie im Wintersemester 2011/2012, sowie in den zwei vorangegangenen Jahren, gehalten habe. Die Vorlesung richte sich an Studenten am Ende der Bachelor oder am Anfang der Masterphase des Studiums. Dabei wurde Vorwissen aus den Pflichtvorlesungen und einige Aufbauvorlesungen vorausgesetzt. Aus der *Analysis auf Mannigfaltigkeiten* wurde eine gewisse Vertrautheit mit der Idee der Mannigfaltigkeit und dem Cartansche Differentialformen-Kalkül vorausgesetzt. Aus der Aufbauvorlesung *Funktionentheorie/Differentialgleichungen* wurde die Entwicklung der komplexen Analysis bis zur Residuen-Satz vorausgesetzt. Speziell aus der Aufbauvorlesung *Topologie* wurden die Theorie der Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume, Homologietheorie bis zum Mayer-Vietoris Sequenz und die Klassifikation von Flächen gebraucht.

An dieser Stelle danke ich Renate Emerenziani für die Versorgung der Latex-Erstfassung und Ben Anthes, Michael Bogner, Jörg Hofmann und Susanne Müller für ihre Hilfe bei der Korrektur. Für Hinweise auf noch verbliebene Fehler bleibe ich dankbar.

D. van Straten

Mainz, Februar 2012.

Einleitung

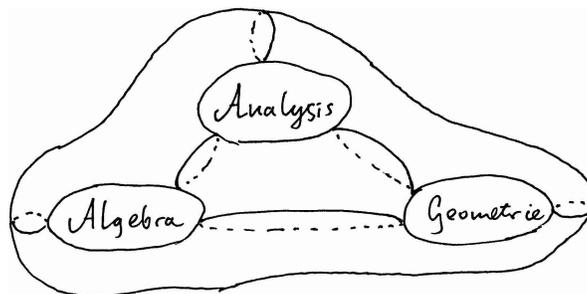
1. Vorlesung,
Mittwoch,
26.10.2011
(8-10 Uhr)

Im Jahre 1851 legte der 24. jährige BERNHARD RIEMANN in Göttingen seine Inauguraldissertation *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* vor. In dieser und in seiner 1857 erschienenen Arbeit *Theorie der Abel'sche Functionen* begründet Riemann einen völlig neuen, geometrischen Zugang zu der Beschreibung von analytischen Funktionen.



BERNHARD RIEMANN
(1826-1866)

Vor allem die Ergebnisse von N. ABEL auf dem Gebiet der Additionstheoreme dürfte ein Ansporn gewesen sein. Statt mit *Formeln* versucht Riemann analytische Funktionen durch ihr *qualitatives Verhalten* zu charakterisieren. Die von Riemann angestoßene Theorie verlangte aber neuartige mathematische Konzepte und Techniken aus der Topologie und Analysis, welche erst in der nachfolgende Zeit entwickelt wurden. Erst nach HERMAN WEYLS Vorlesung und seinem Buch *Die Idee der Riemannsche Fläche* fand die Theorie seinen logischen Abschluss.



Die so entstandene Theorie der Riemannschen Flächen verbindet so auf überraschende Weise verschiedene Gebiete der Mathematik, wie (komplexe) Analysis, Algebra und Geometrie und besitzt großes Anwendungspotential.

Die historischen Wurzeln der Theorie lassen sich bis ins 18. Jahrhundert zurück verfolgen, insbesondere zu den *Additionstheoreme für elliptische Funktionen*. Wir sagen, eine Funktion $\varphi(u)$ besitzt ein *Additionstheorem*, falls es ein $G(x, y)$ gibt, so dass

$$\varphi(u + v) = G(\varphi(u), \varphi(v))$$

für alle u, v gilt. Das Standardbeispiel ist die Exponentialfunktion, für die gilt

$$e^{u+v} = e^u \cdot e^v$$

Hier ist $G(x, y) = x \cdot y$. Ein weiteres Beispiel ist die Sinus-Funktion, für die gilt

$$\begin{aligned} \sin(u + v) &= \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v) \\ &= \sin(u) \sqrt{1 - \sin^2(v)} + \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cdot \sin(v), \end{aligned}$$

wobei $G(x, y) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$. Dies ist eine *algebraische Funktion* und wir sprechen vom *algebraischen Additionstheorem*. Diese Additionstheoreme hängen mit *Additionstheoremen für Integrale zusammen*, welche invers zu den obigen Funktionen sind:

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{dt}{t} &= \int_1^{xy} \frac{dt}{t} \\ \log x + \log y &= \log xy \\ \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} &= \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \end{aligned}$$

wobei $z = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$. Also

$$\arcsin(x) + \arcsin(y) = \arcsin(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}).$$

Um 1750 entdeckte EULER, inspiriert durch FAGNANO, dass

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}},$$

wobei

$$z = \frac{x\sqrt{1 - y^4} + y\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^2y^2},$$

so dass die inverse Funktion ebenfalls ein algebraisches Additionstheorem besitzt!

Nach diesem sogenannten *elliptischen Integral* wurden allgemeiner *hyperelliptische Integrale* studiert. Diese sind von der Form

$$\int \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

wobei $P(t)$ ein Polynom in t ist. Noch viel allgemeinere Integrale der Form

$$\int R(t,s)dt,$$

wobei $R(t,s)$ ein rationalen Ausdruck in s und t ist, welche durch eine polynomielle Relation

$$F(s,t) = 0$$

verknüpft sind, wurden von ABEL studiert. Man nennt $\omega = R(t,s)dt$ ein *abelsches Differential* auf der algebraischen Kurve $F(t,s) = 0$.



NIELS HENRIK ABEL
(1802-1829)

Das Abelsche Additionstheorem

Zu jedem abelschen Differential $\omega = R(t,s)dt$, wobei $F(t,s) = 0$, existiert eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$, so dass jede Summe von N Integralen sich auf eine Summe von $\leq p$ solchen Integralen reduzieren lässt:

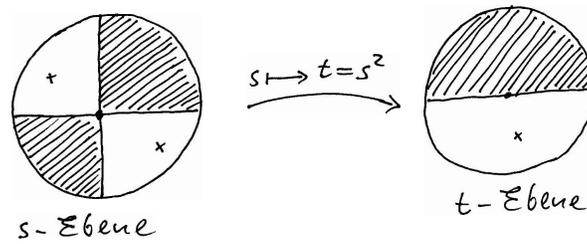
$$\begin{aligned} & \int_a^{x_1} \omega + \int_a^{x_2} \omega + \cdots + \int_a^{x_N} \omega \\ &= \int_a^{y_1} \omega + \int_a^{y_2} \omega + \cdots + \int_a^{y_p} \omega + E \end{aligned}$$

Dabei hängen y_1, \dots, y_p algebraisch von x_1, \dots, x_N ab und E bezeichnet eine elementare Funktion von x_1, x_2, \dots, x_N .

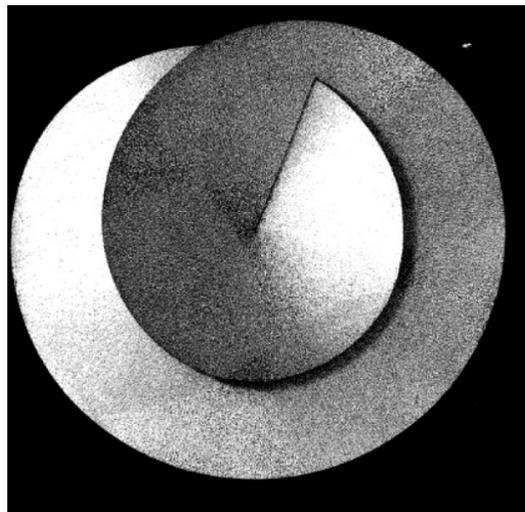
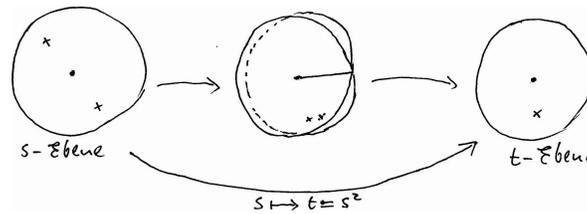
Und Elementar heißt hier: algebraisch +log algebraisch.

Um solche Integrale genau zu definieren, werden wir uns mit der *Topologie der Kurve* $\{F(t,s) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ auseinander setzen müssen.

Schauen wir uns erst die Gleichung $s^2 - t = 0$ etwas genauer an. Das untenstehende Bild gibt an, wie die komplexe s -Ebene auf die komplexe t -Ebene abgebildet wird. Die obere t -Ebene und ihr Urbild in der s -Ebene wurden schraffiert wiedergegeben.



Beachte, dass bei Umlauf um $t = 0$ die beiden Lösungen von $s^2 = t$ vertauscht werden! Wir nennen dies einen *Windungs- oder Verzweigungspunkt*. Alternative Darstellung:



Die Riemann'sche Windungsfläche erster Ordnung.

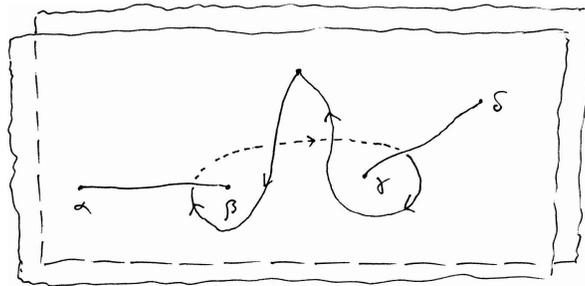
Vergl. Seite 162-168, 213-214 und 218-221

Lith. Ernst M. Singer, Leipzig.

Wir wollen jetzt die Topologie der komplexen Kurve

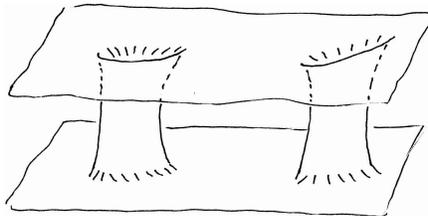
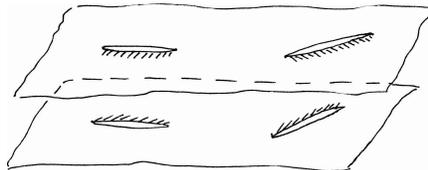
$$s^2 = (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)(t - \delta)$$

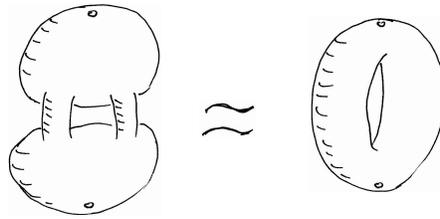
beschreiben. Für $t \neq \alpha, \beta, \gamma, \delta$ haben wir zwei verschiedene Lösungen für s ; die Punkte $t = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind Windungspunkte wie oben. Wir können uns die Lösungsmenge vorstellen als *Doppelebene mit 4 Windungspunkten*.



Wir verbinden die Windungspunkte paarweise durch einen sogenannten *Querschnitt*; beim Passieren eines Querschnitts wechseln wir das *Blatt*. Einen Weg im unteren Blatt geben wir mit einer gestrichelten Linie wieder.

Um die Lösungsmenge topologisch besser zu verstehen, schneiden wir die Ebenen entlang der Querschnitte auf und kleben sie wieder zusammen:





Wir erhalten somit einen Torus minus zwei Punkte im Unendlichen!

Die Einsicht, dass man beim Studium von elliptischen und höheren Integralen die Geometrie von algebraischen Kurven und die komplexe Analysis auf topologisch nicht trivialen Flächen betreiben muss, ist die eigentliche Botschaft dieser Vorlesung.

Literatur zu Riemannschen Flächen

- B. Riemann, *Gesammelte Werke*
- C. Neumann, *Vorlesung über Riemanns Theorie der abelschen Integrale*
- H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*
- A. Pflüger, *Theorie der Riemannschen Flächen*
- O. Forster, *Riemannsche Flächen*
- G. Springer, *Introduction to Riemann Surfaces*

Literatur zu algebraischen Kurven

- E. Brieskorn, H. Knörrer, *Ebene algebraische Kurven*
- F. Kirwan, *Complex algebraic Curves*
- P. Griffiths, *Introduction to algebraic curves*
- G. Fischer, *Ebene algebraische Kurven*

Funktionentheorie

Es gibt viele vortreffliche Darstellungen der Funktionentheorie. Ein Klassiker ist A. Hurwitz-R. Courant: *Funktionentheorie* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band III, Verlag Julius Springer). Die Lehrbücher von C. Caratheodory, C. L. Siegel und R. Remmert sind ebenfalls empfehlenswert.

§1. Aus der Funktionentheorie

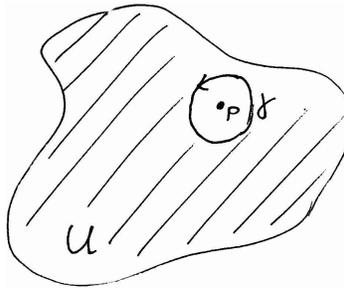
(1.1) Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, so heißt f *holomorph* auf U , wenn sie für alle $p \in U$ in eine konvergente Potenzreihe

$$f(z) = a_0 + a_1(z-p) + a_2(z-p)^2 + \dots$$

entwickelt werden kann. Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert dann auf offenen Scheiben $D(p, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-p| < r\}$, welche gänzlich in U enthalten sind. Die Taylor-Koeffizienten $a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}$ lassen sich mit Hilfe der CAUCHYSchen Integralformel bestimmen

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} \cdot dz,$$

wobei $\oint = \int_\gamma$ das Integral über einen positiv orientierten, geschlossenen Weg γ um den Punkt p bezeichnet.



Ist f auf U durch eine positive Konstante M beschränkt, so folgt $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ und somit ist eine auf ganz \mathbb{C} definierte, beschränkte, holomorphe Funktion *konstant*: der Satz von LIOUVILLE .

Die Menge aller auf U holomorphen Funktionen notieren wir mit

$$\mathcal{O}(U)$$

(vom französischen „olomorph“).

Mit der punktweisen Addition und Multiplikation von Funktionen wird $\mathcal{O}(U)$ zu einem Ring und gar einer \mathbb{C} -Algebra. Da mit $f \in \mathcal{O}(U)$ auch die Ableitung f' holomorph ist, ist $\mathcal{O}(U)$ eine sogenannte *differentielle \mathbb{C} -Algebra*.

Die Menge aller konvergenten Potenzreihen um p bezeichnen wir \mathcal{O}_p . Es ist also

$$\mathcal{O}_p := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n \mid \exists \rho > 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty \right\}.$$

Die konvergenten Potenzreihen bilden ebenfalls eine differentielle C-Algebra und die Abbildung

$$T_p: \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_p$$

$$f \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n,$$

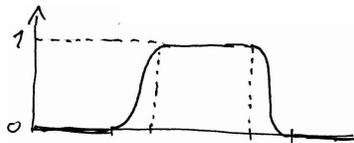
welche jeder holomorphen Funktion ihre Taylorreihe in p zuordnet, ist ein differentieller Homomorphismus von C-Algebren: Summe, Produkt und Ableitung von holomorphen Funktionen entsprechen Summe, Produkt und Ableitung von konvergenten Potenzreihen.

Ist U ein Gebiet, d.h. eine offene, zusammenhängende Menge, so ist die Abbildung T_p injektiv. Dies folgt aus dem

Identitätssatz

Zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet U , welche auf einer Menge mit einem Häufungspunkt übereinstimmen, sind überhaupt gleich.

Holomorphe Funktionen können also nicht an einer Stelle abgeändert werden, ohne dass sich dies an allen anderen Stellen bemerkbar macht. Dies steht im Gegensatz zu der allgemeineren Klasse der C^∞ -Funktionen. Wir werden später noch für die bekannte C^∞ -„Hut-Funktion“ $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Verwendung haben.



2. Vorlesung:
Freitag,
26.10.2011
(8-10 Uhr)

(1.2) Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \neq 0$, $f \in \mathcal{O}(U)$, so folgt aus dem Identitätssatz, dass die Menge der Nullstellen von f

$$N(f) := \{z \in U \mid f(z) = 0\}$$

stets eine diskrete Teilmenge von U ist: die Nullstellen können sich höchstens am Rand von U häufen. Der Kehrwert $1/f$ einer holomorphen Funktion ist holomorph auf

$$U' = U \setminus N(f)$$

und besitzt *Polstellen*, wo f Nullstellen hat.

Allgemein verstehen wir unter einer *meromorphen Funktion auf U* , eine holomorphe Funktion

$$f: U' \longrightarrow \mathbb{C},$$

wobei $U' \subset U$, so dass für alle $p \in U \setminus U'$ f eine Entwicklung als *Laurent-Reihe* besitzt:

$$f(z) = \sum_{n \geq -N} a_n (z-p)^n = \frac{a_{-N}}{(z-p)^N} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-p)} + a_0 + a_1(z-p) + \cdots$$

Die Reihe auf der rechten Seite soll dabei für alle $z \in D(p,r) \setminus \{p\}$ in einer hinreichend kleinen offenen Kreisscheibe $D(p,r) \subset U'$ konvergieren.

Der Polanteil

$$H_p(f) := \frac{a_{-N}}{(z-p)^N} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-p)}$$

wird auch *Hauptteil* von f genannt.

Wir können also eine meromorphe Funktion auf U darstellen als

$$f = H_p(f) + g,$$

wobei g holomorph ist bei p ; p ist genau dann eine Polstelle von f , wenn $H_p(f) \neq 0$. Wir notieren mit $P(f)$ die Menge der Polstellen. Die Menge aller meromorphen Funktionen auf U notieren wir

$$\mathcal{M}(U).$$

Auch dies ist eine (differentielle) \mathbb{C} -Algebra, aber bei der Addition und Multiplikation ist natürlich zu beachten, dass wir die Funktionen erst auf einen gemeinsamen Definitionsbereich einschränken müssen.

Sehr nützlich ist die Betrachtung der *erweiterten komplexen Zahlenebene*

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

wobei wir stets die üblichen Rechenregeln

$$1/0 = \infty, \quad 1/\infty = 0, \quad 1 + \infty = \infty, \quad \text{etc.}$$

anwenden werden. Wir können $\widehat{\mathbb{C}}$ versehen mit der Topologie als Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{C} , und als solches ist $\widehat{\mathbb{C}}$ homöomorph zu der *Riemannschen Zahlenkugel*. Durch stereographische Projektion der Sphäre S^2 aus dem Nordpol N erhalten wir eine Bijektion

$$\rho : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}.$$

Eine meromorphe Funktion können wir dann als eine *stetige* Funktion

$$f : U \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

auffassen, wobei wir $f(p) = \infty$ für $p \in P(f)$ setzen werden.

Ist U ein Gebiet und $f \in \mathcal{M}(U)^* := \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$, so ist auch

$$1/f \in \mathcal{M}(U)^*.$$

Somit ist in diesem Fall $\mathcal{M}(U)$ ein Körper; es gilt

$$N(f) = P(1/f) \quad P(f) = N(1/f).$$

Wir notieren die Menge aller konvergenten Laurentreihen um p mit \mathcal{M}_p , also

$$\mathcal{M}_p := \left\{ \sum_{n \geq -N} a_n (z-p)^n \mid \exists \rho > 0 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty \right\}.$$

Dies ist auf offensichtliche Weise ein (differentieller) Körper. Die Abbildung

$$\begin{aligned} L_p : \mathcal{M}(U) &\longrightarrow \mathcal{M}_p \\ f &\longmapsto \sum_{n \geq -N} a_n (z-p)^n, \end{aligned}$$

welche einer meromorphen Funktion ihre Laurentreihe zuordnet, ist ein differentieller \mathbb{C} -Algebren Homomorphismus. Ist U ein Gebiet, so ist L_p injektiv.

Es sei in diesem Zusammenhang an folgenden Sachverhalt erinnert: ein $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$ hat eine holomorphe Erweiterung zu U , wenn $|f(z)|$ in einer Umgebung von p beschränkt ist: RIEMANN'SCHER ERWEITERUNGSSATZ. Ist $\lim_{z \rightarrow p} |f(z)| = \infty$, so besitzt f bei p eine Polstelle. Anderenfalls nimmt f in jeder noch so kleinen Umgebung von p fast alle Werte an (SATZ VON CASORATI-WEIERSTRASS).

(1.3) Ist $f \in \mathcal{M}(U)$ eine meromorphe Funktion mit Laurentreihen-Entwicklung bei p

$$f(z) = \sum_{n \geq -N} a_n (z-p)^n,$$

so heißt $v_p(f) := \min\{n \mid a_n \neq 0\}$ die *Ordnung* von f in p . Sind alle $a_n = 0$, so setzen wir $v_p(f) = \infty$

Offensichtlich ist:

$$\begin{aligned} v_p(f) = -k \quad (k > 0) &: f \text{ hat Polstelle der Ordnung } k \text{ in } p \\ v_p(f) = k \quad (k > 0) &: f \text{ hat Nullstelle der Ordnung } k \text{ in } p. \end{aligned}$$

Ist $v_p(f) = 0$, so gilt $f(p) \notin \{0, \infty\}$. Wir können also stets schreiben

$$f(z) = (z-p)^{v_p(f)} \cdot g_p(z), \quad \text{mit } v_p(g_p(z)) = 0.$$

Die Funktion v_p ist definiert auf \mathcal{M}_p und hat die Eigenschaften

1. $v_p : \mathcal{M}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}$ ist surjektiv

2. $v_p(f \cdot g) = v_p(f) + v_p(g)$
3. $v_p(f + g) \geq \min\{v_p(f), v_p(g)\}$

und bemerke, dass

$$\mathcal{O}_p = \{f \in \mathcal{M}_p \mid v_p(f) \geq 0\}.$$

Ist allgemein K ein Körper, so nennt man eine Funktion $v : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ mit diesen drei Eigenschaften eine *diskrete Bewertung* auf K . Die Menge $R = \{f \in K^* \mid v(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ ist dann ein Ring und wird *Bewertungsring* genannt. Der Quotientenring $Q(R)$ ist dann wieder K .

(1.4) Ein *Divisor* auf U ist eine formale lineare Kombination von Punkten $P_i \in U$

$$D = n_1 P_1 + n_2 P_2 + \dots, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Es handelt sich hier um eine *formale Summe*, also nicht etwa die Summe als Elemente von \mathbb{C} ! Die Summe kann endlich oder unendlich sein, in welchem Fall wir voraussetzen, dass

$$\{P_1, P_2, \dots\} \subset U$$

eine *diskrete* Teilmenge von U ist. Die Divisoren bilden auf offensichtliche Weise eine abelsche Gruppe

$$\text{Div}(U).$$

Alternativ könnten wir $\text{Div}(U)$ als Menge aller Funktionen $n : U \rightarrow \mathbb{Z}, p \mapsto n_p$ mit diskretem Träger $\{p \in U \mid n_p \neq 0\} \subset U$ definieren.

Ist $D = n_1 P_1 + n_2 P_2 + \dots + n_r P_r$ ein (endlicher) Divisor, so nennen wir

$$\text{Grad}(D) = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

den *Grad* von D . Ein Divisor $D = n_1 P_1 + n_2 P_2 + \dots$ heißt *positiv* oder *effektiv*, wenn alle Koeffizienten $n_i \geq 0$ sind und wir schreiben dann $D \geq 0$ und $D \geq D'$, wenn $D - D' \geq 0$.

Ist $f \in \mathcal{M}(U)^*$, so setzen wir

$$(f) := (f)_U := \sum_{P \in U} v_p(f) P.$$

Der Divisor (f) enthält also genau die Information über die *Lage* und *Vielfachheit* der Null- und Polstellen von f .

Bemerke, dass

$$(g \cdot h) = (g) + (h) \quad \text{und} \quad (g/h) = (g) - (h)$$

Sind $f, g \in \mathcal{M}(U)$, dann ist $f = g \cdot h$ mit $h = f/g$. Also ist $(f) = (g)$ genau dann, wenn $(h) = 0$. Dies bedeutet aber $v_p(h) = 0$ für alle $p \in U$, d.h. h hat

keine Null- oder Polstellen. In anderen Worten, $h \in \mathcal{O}(U)$ und $1/h \in \mathcal{O}(U)$, d.h. h ist eine *Einheit* im Ring $\mathcal{O}(U)$. Wir sehen, dass der *Divisor* (f) die Funktion f bis auf Multiplikation mit einer Einheit festlegt.

Dies führt uns zu der wichtige Frage:

Gibt es zu jedem $D \in \text{Div}(U)$ eine Funktion $f \in \mathcal{M}(U)^*$ mit $(f) = D$?

Für einen endlichen Divisor $D = n_1P_1 + n_2P_2 + \dots + n_kP_k - m_1Q_1 - m_2Q_2 - \dots - m_lQ_l$ ist dies einfach zu beantworten. Für die rationale Funktion

$$f = \frac{(z - P_1)^{n_1}(z - P_2)^{n_2} \dots (z - P_k)^{n_k}}{(z - Q_1)^{m_1}(z - Q_2)^{m_2} \dots (z - Q_l)^{m_l}}$$

gilt offensichtlich

$$(f) = D.$$

(1.5) Ein Ausdruck der Form

$$\omega = f(z)dz$$

mit $f \in \mathcal{M}(U)$ nennen wir ein *meromorphes Differential* auf U . Wir setzen weiter

$$v_p(\omega) := v_p(f)$$

und können so über Vielfachheit von Null- und Polstellen von ω sprechen. Ebenso setzen wir

$$(\omega) = \sum v_p(\omega)P \in \text{Div}(U)$$

und nennen dies den *Divisor* von ω .

Ist $f(z) = \dots + \frac{a_{-1}}{z-p} + a_0 + \dots$ die Laurent-Entwicklung von f bei p , so heißt

$$\text{Res}_p(\omega) := a_{-1}$$

das *Residuum* von ω in p .

Wir sagen:

ω ist von *erster Art* $\Leftrightarrow f(z) \in \mathcal{O}(U)$ - solche Differentiale heißen auch *holomorphe Differentiale*.

ω ist von *zweiter Art* $\Leftrightarrow \text{Res}_p(\omega) = 0$ für alle $p \in U$.

ω ist von *dritter Art* in allen sonstigen Fällen.

Ist ω eine meromorphes Differential auf einem Gebiet U und $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus P(\omega)$ ein stückweise differenzierbarer Weg, so ist das *Weg-Integral*

$$\int_{\gamma} \omega$$

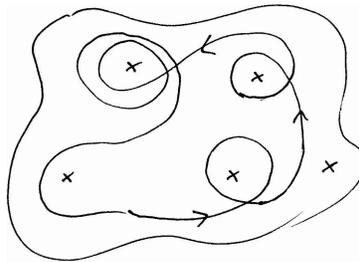
wohldefiniert.

Ist $\gamma(0) = \gamma(1)$, so liegt ein geschlossener Weg vor und $\int_{\gamma} \omega$ heißt *Periode* von ω . Eine Version des Residuensatzes lautet wie folgt:

Residuensatz

Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet, ω meromorph auf U und $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus P(\omega)$ geschlossen. Dann gilt:

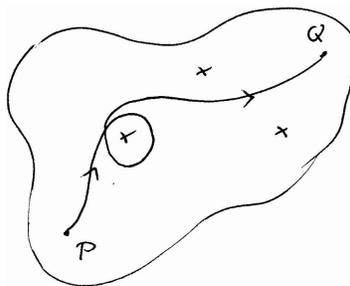
$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi i \sum_{p \in U} \text{Ind}_p(\gamma) \text{Res}_p(\omega).$$



Hierbei ist $\text{Ind}_p(\gamma)$ der Index oder die Windungszahl von γ um p .

Ist ω also von 1. oder 2. Art, so ist stets $\int_{\gamma} \omega = 0$. In diesem Fall hängt für den allgemeinen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus P(\omega)$ das Integral $\int_{\gamma} \omega$ nur von $P = \gamma(0)$ und $Q = \gamma(1)$ ab und wir setzen

$$\int_P^Q \omega := \int_{\gamma} \omega.$$



Insbesondere besitzt $f(z)$ in solchen Fällen eine *Stammfunktion*

$$F(w) = \int_P^w f(z) dz.$$

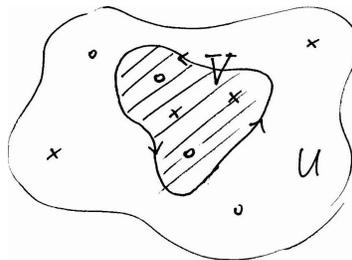
Hierbei ist P ein beliebig gewählter Basispunkt.

Eine weitere Anwendung ist das *Null- und Polstellen zählende Integral*:

Null- und Polstellen zählendes Integral

Der einfach geschlossene Weg γ umschlieÙe das Gebiet $V \subset U$. Dann gilt für $f \in \mathcal{M}(U)$

$$\int_{\gamma} \frac{df}{f} = 2\pi i \cdot \text{Grad}((f)_V).$$



Wenn wir $f = (z - p)^n g$ schreiben, mit $v_p(g) = 0$, so ist $\frac{df}{f} = n \cdot \frac{dz}{z-p} + \frac{dg}{g}$. Also ist $\text{Res}_p \left(\frac{df}{f} \right) = n = v_p(f)$. Die Aussage folgt nun direkt aus dem Residuensatz, da V genau die Menge der Punkte $p \in U$ ist, für die $\text{Ind}_p(\gamma) = 1$.

Eine Anwendung hiervon ist die Existenz eines Logarithmus unter gewissen Bedingungen:

Existenz von Logarithmen

Eine holomorphe Funktion f auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ohne Nullstellen besitzt einen Logarithmus, das heißt es existiert ein $g \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$f = e^g.$$

Wie wir oben gesehen haben, gilt für eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(U)$ und $p \in U$:

$$\text{Res}_p \left(\frac{df}{f} \right) = v_p(f).$$

Ist also $(f)' = 0$, so ist das Differential $\frac{df}{f}$ stets von der 2. Art.

Das Wegintegral

$$g(z) = \int_P^z \frac{df}{f} = \int_P^z \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

ist eine auf U holomorphe Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = C \cdot e^{g(z)} \quad (C = f(P)),$$

was direkt zu der Behauptung führt.

3. Vorlesung,
Mittwoch,
02.11.2011
(8-10 Uhr)

(1.6) Ist U ein Gebiet, so stellt sich die Frage, ob bei vorgegebenen Hauptteilen stets ein $f \in \mathcal{M}(U)$ gefunden werden kann, welches genau diese Hauptteile besitzt. Dies nennt man das *Problem von MITTAG-LEFFLER*.

Unter einer *Hauptteilverteilung* verstehen wir die Vorgabe einer diskreten Menge

$$\Sigma = \{p_1, p_2, \dots\} \subset U$$

und für jedes $i = 1, 2, \dots$ einen Hauptteil

$$\begin{aligned} h_i(z) &= P_i \left(\frac{1}{z - p_i} \right) \\ &= \frac{a_{-N}^{(i)}}{(z - p_i)^N} + \dots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{(z - p_i)}. \end{aligned}$$

Satz von MITTAG-LEFFLER

Auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ existiert zu jeder Hauptteilverteilung ein $h \in \mathcal{M}(U)$ mit

$$\begin{aligned} H_p(h) &= 0 \quad \text{für } p \notin \Sigma \\ H_{p_i}(h) &= h_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$



GÖSTA MITTAG-LEFFLER
(1846-1927)

Die Beweisidee für $U = \mathbb{C}$ ist einfach: wir möchten eigentlich

$$h = h_1 + h_2 + \dots$$

bilden, aber diese Reihe konvergiert im Allgemeinen nicht, wie das einfachste Beispiel $\Sigma = \{1, 2, \dots\}$, mit $h_n = \frac{1}{z-n}$ zeigt. Die Idee ist, jedes h_n durch den Anfang seiner Taylorreihe abzuändern. Es ist

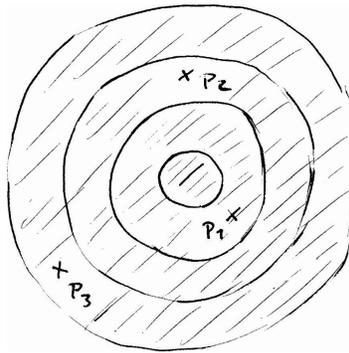
$$h_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{n}} = -\frac{1}{n} \left(1 + \frac{z}{n} + \left(\frac{z}{n}\right)^2 + \dots \right).$$

h_n hat den gleichen Hauptteil wie \tilde{h}_n , gegeben durch

$$\tilde{h}_n = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{n(z-n)}.$$

Die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z-n)}$ aber konvergiert für alle $z \neq 1, 2, 3, \dots$

Allgemein geht man ähnlich vor. Wir können ohne Einschränkung (etwa nach Verschiebung) voraussetzen, dass $0 \notin \Sigma$ und wählen eine Folge von Kreisscheiben $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ mit der Eigenschaft, dass $p_i \in K_i$, $p_j \notin K_i$ für $j > i$ und $\cup_{i=0}^{\infty} K_i = \mathbb{C}$.



Wir wählen weiter $\epsilon_i > 0$, so dass $\sum \epsilon_i < \infty$ und $N_i \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|h_i - T_0^{N_i}(h_i)\| \leq \epsilon_i.$$

Wir setzen $\tilde{h}_i := h_i - T_0^{N_i}(h_i)$, also ist offensichtlich

$$H_p(\tilde{h}_i) = H_p(h_i).$$

Die Reihe

$$\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \dots$$

konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ gegen ein $h \in \mathcal{M}(U)$ mit $H_{p_i}(h) = h_i$.

Wenn wir diese Prozedur anwenden auf $\Sigma = \mathbb{Z}$, $h_n = 1/(z - n)$ so finden wir

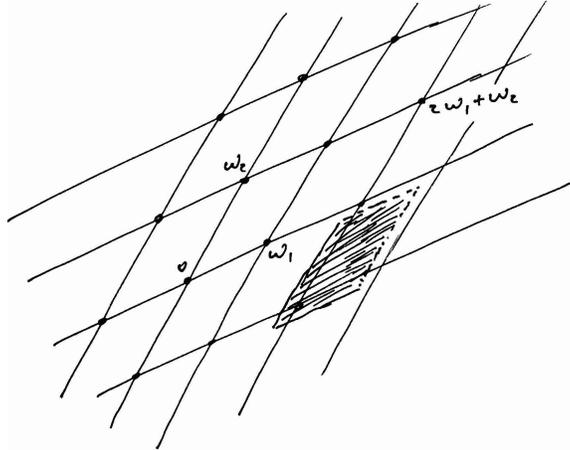
$$\frac{1}{z} + \sum \left(\frac{1}{z - n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Die Summe ist $\pi \cot \pi x$ (Kotangensreihe).

Für $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, linear unabhängig über \mathbb{R} , betrachten wir die Menge

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Es ist eine abelsche Untergruppe von \mathbb{C} und wird das von ω_1 und ω_2 aufgespannte *Gitter* genannt.



Die *Weierstraßsche* \wp -Funktion zum Gitter Γ ist gegeben durch

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Gamma} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Sie besitzt Pole der Ordnung 2 in den Gitterpunkten $\omega \in \Gamma$ und ist *doppelt periodisch*, d.h.

$$\wp(z + \omega_1) = \wp(z + \omega_2) = \wp(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Werte der Funktion sind also festgelegt durch die Werte in einem Parallelogramm der Form

$$P_\alpha := \{\alpha + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid 0 \leq \lambda < 1, 0 \leq \mu < 1\},$$

wobei die linke untere Ecke $\alpha \in \mathbb{C}$ frei wählbar ist.

(1.7) Die Frage nach der Existenz einer meromorphen Funktion zu einem vorgegebenen Divisor, lässt sich mit Hilfe des Satzes von MITTAG-LEFFLER positiv beantworten.

Satz

Zu jedem Divisor $D \in \text{Div}(U)$ existiert ein $f \in \mathcal{M}(U)$, so dass

$$(f) = D.$$

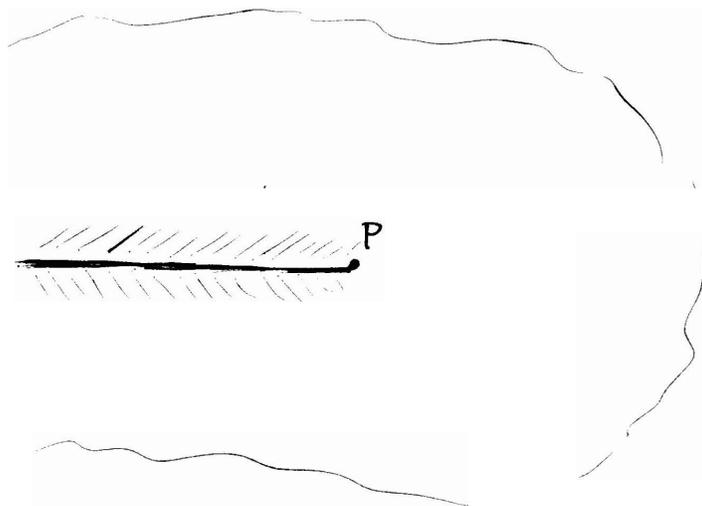
Zum Beweis, betrachte für ein $p \in \mathbb{C}$ die Halbgerade

$$S = \{P + r \mid r \in \mathbb{R}, r < 0\}.$$

Auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C} \setminus S$ wird durch das Wegintegral

$$\int_a^z \frac{n}{t-p} dt = n \cdot \log(z-p) + c = \log((z-p)^n) + c$$

eine holomorphe Funktion definiert. Diese Funktion hat entlang S einen Sprung: Die Differenz der Funktionswerte am Nord- und Südufer von S beträgt demnach $2\pi i \cdot n$.



Da $\exp(2\pi i \cdot n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, hat die Funktion

$$\exp \int_a^z \frac{n}{t-p} dt,$$

eine holomorphe Erweiterung auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ und es ist natürlich

$$\exp \int_a^z \frac{n}{t-p} dt = C(z-p)^n, \quad C = \exp(c).$$

Ist $D = \sum n_i p_i \in \text{Div}(U)$ ein beliebiger Divisor und $h \in \mathcal{M}(U)$ eine meromorphe Funktion, welche das Mittag-Leffler Problem in U für

$$\Sigma = \{p_1, p_2, \dots\} \quad ; \quad h_i = \frac{n_i}{z-p_i}$$

löst, so gilt für einen geschlossenen Weg γ in U

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h(z) dz &= 2\pi i \sum \text{Ind}_{p_i}(\gamma) \text{Res}_{p_i}(h) \\ &= 2\pi i \sum \text{Ind}_{p_i}(\gamma) n_i \in 2\pi i \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also ist $\exp \int_{\gamma} h(z) dz = 1$ und somit

$$\int_a^z h(z) dz$$

wohldefiniert modulo $2\pi i \mathbb{Z}$.

Die Funktion

$$f(z) := \exp \int_a^z h(z) dz$$

ist unabhängig von der Wahl des Weges von a nach z . In der Nähe von p_i können wir schreiben

$$h = \frac{n_i}{z-p_i} + g, \quad H_{p_i}(g) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_a^z h(t) dt &= \int_a^z \frac{n_i}{t-p_i} dt + \int_a^z g dt \\ &= \log(z-p_i)^{n_i} + \int_a^z g dt \end{aligned}$$

$$\exp \int_a^z h(t) dt = (z-p_i)^{n_i} \cdot \tilde{g}(z)$$

mit $v_{p_i}(\tilde{g}) = 0$.

Es ist also $v_i(f) = n_i$ und somit haben wir zu vorgegebenem Divisor D eine meromorphe Funktion f gefunden, für die $(f) = D$ gilt.

Wenn wir uns die Konstruktion von h nochmals anschauen, so finden wir, dass f als Weierstraß-Produkt geschrieben werden kann

$$f(z) = C \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{p_i}\right)^{n_i} \exp \left(\frac{z}{p_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{p_i}\right)^2 + \dots + \frac{1}{N_i} \left(\frac{z}{p_i}\right)^{N_i} \right)$$

Besonders berühmt ist das Sinus-Produkt

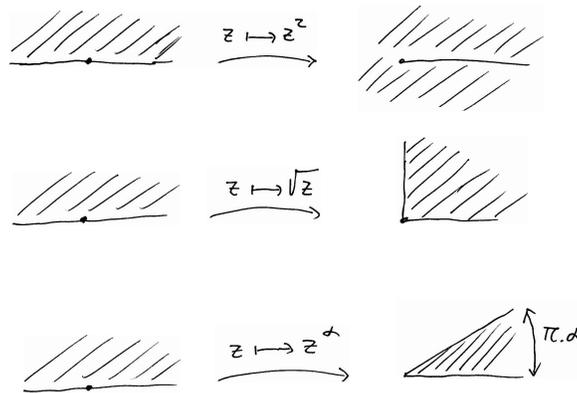
$$\begin{aligned} \sin(\pi z) &= \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \\ &= \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Für mehr Details verweisen wir auf die angegebene Literatur zur Funktionentheorie.

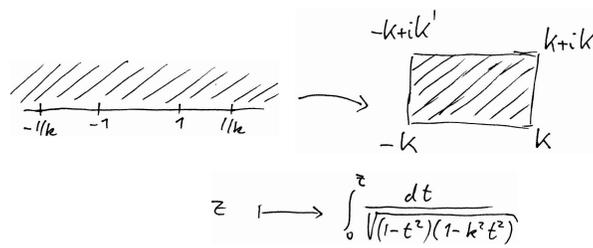
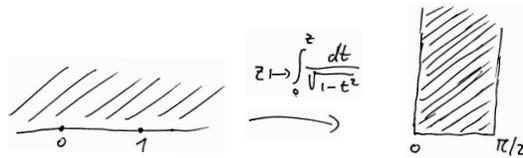
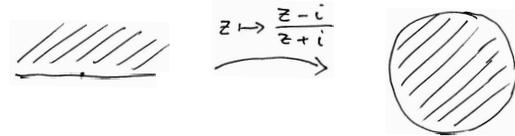
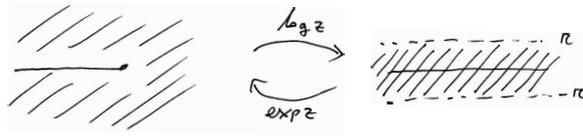
(1.8) Da Holomorphie gleichbedeutend ist mit komplexer Differenzierbarkeit, ist die Komposition zweier holomorpher Abbildungen wieder holomorph: $f : U \rightarrow V$ holomorph, $g : V \rightarrow W$ holomorph $\Rightarrow g \circ f : U \rightarrow W$ holomorph.

Ein *Biholomorphismus* ist eine holomorphe Bijektion $f : U \xrightarrow{1:1} V$. Die inverse Abbildung $g := f^{-1} : V \rightarrow U$ ist aus einem ähnlichen Grund auch holomorph und somit ein Biholomorphismus. Wir sagen dann: U und V sind *biholomorph* äquivalent und benutzen die Notation $U \cong V$, um diesen Sachverhalt auszudrücken.

Wir geben einige Beispiele. Die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$ bilden wir auf Gebiete in \mathbb{C} ab.



Durch $z \mapsto z^2$ wird \mathbb{H} auf eine *Schlitzebene*, durch $z \mapsto \sqrt{z}$ auf einen *Quadranten* und allgemein durch $z \mapsto z^\alpha$ auf einen *Sektor* abgebildet.

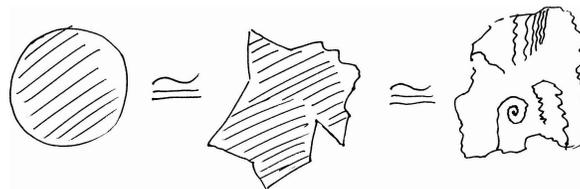


Der Riemannsche Abbildungssatz

Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $U \neq \mathbb{C}$ ist biholomorph zu $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$:

$$U \cong \mathbb{D}$$

Also sind alle solche Gebiete zueinander biholomorph!



Eine Potenzreihe $f(z)$ mit $f(0) = 0$

$$f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \in \mathbb{C}\{z\}$$

können wir in eine andere Potenzreihe einsetzen; die Konvergenz bleibt dabei erhalten. Ist $a_1 \neq 0$, so nennen wir $f(z)$ einen *lokalen Parameter* bei $z = 0$. Es existiert dann eine *inverse Potenzreihe*

$$g(z) = b_1z + b_2z^2 + \dots \in \mathbb{C}\{z\},$$

so dass $z = f \circ g(z) = g \circ f(z)$. (Es ist zum Beispiel $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = -\frac{a_2}{a_1} \cdot b_1^2$, etc.)

Ist $w = a_1z + a_2z^2 + \dots$ ein lokaler Parameter, so lässt sich auch z in w ausdrücken

$$z = b_1w + b_2w^2 + \dots$$

Durch „Einsetzen“ lässt sich $F(z)$ in w ausdrücken:

$$F(z) = F(z(w)).$$

Ist $\text{ord}_0(f) = \nu > 0$, so ist

$$\begin{aligned} F(z) &= a_1z^\nu + a_2z^{\nu+1} + \dots \\ &= a_1z^\nu(1 + a_2z + a_3z^2 + \dots) \\ &= a_1z^\nu(1 + g(z)) \\ &= (w)^\nu, \end{aligned}$$

wobei $w = a_1^{1/\nu}z(1 + g(z))^{1/\nu}$.

Mit Hilfe der Binomischen Reihe

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1)$$

sehen wir, dass

$$w = a_1^{1/\nu}z \left(1 + \binom{1/\nu}{1} g(z) + \dots \right)$$

ein lokaler Parameter ist. Wir sehen: indem wir die Funktion f in einem geeigneten lokalen Parameter ausdrücken, wird f zu einer ν -ten Potenz, wobei $\nu = \text{ord}_0(f)$. Mutatis mutandis gilt dies auch für Potenzreihenentwicklungen um andere Punkte. Eine direkte Folgerung ist:

Offenheitssatz

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist $f(U) \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge.

Wir bemerken weiter, dass der Unterschied zwischen Funktionen und Differentialen durch unterschiedliches Verhalten unter Koordinatentransformation zum Ausdruck kommt: Wenn wir

$$\omega = f(z) dz$$

in dem lokalen Parameter w ausdrücken wollen, so erhält man

$$f(w) dw = f(w(z)) \frac{dw(z)}{dz} \cdot dz.$$

Durch dieses Transformationsverhalten sind das Wegintegral $\int_{\gamma} \omega$ und das Residuum $\text{Res}_p(\omega)$ unabhängig von der Parametrisierung.

(1.9) Wenn wir $z = x + iy$ und $f = u + iv$ schreiben, so erhalten wir aus einer komplexen Funktion zwei reellwertige Funktionen u, v in zwei reellen Variablen:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Das Paar (u, v) definiert eine Abbildung

$$(u, v) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

und die komplexe Differenzierbarkeit von f ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einer komplexen Zahl $a + ib$ entspricht, d. h. von der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist. Also ist die komplexe Differenzierbarkeit äquivalent zu den sogenannten CAUCHY-RIEMANN Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u. \end{cases}$$

Es folgt dann

$$\partial_x^2 u = \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = \partial_y (-\partial_y u) = -\partial_y^2 u,$$

also $\Delta u = 0$ und genauso $\Delta v = 0$.

Hierbei ist

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

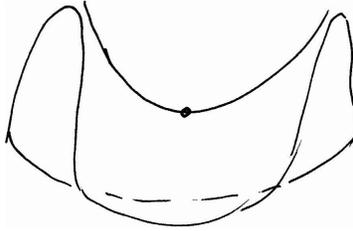
der Laplace Operator. Die Funktionen h , wie u und v , für die $\Delta h = 0$ gilt, werden *harmonische Funktionen* genannt. Die CAUCHYSche Integralformel führt auf folgenden Mittelwertsatz für harmonische Funktionen:

Mittelwertsatz für harmonische Funktionen

Für eine harmonische Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) d\varphi,$$

wobei ρ so klein gewählt ist, so dass die Kreisscheibe um (x, y) mit Radius ρ gänzlich in U enthalten ist.



Da $h(x, y)$ überall gleich dem Mittelwert der Werte in einem Kreis um (x, y) ist, sind die kritischen Punkte von h immer sattelartig; ein Maximum oder Minimum wird immer am Rand angenommen.

Die CAUCHY-RIEMANN Gleichungen drücken auch aus, dass die Gradienten von u und v

$$\begin{aligned} \nabla u &= (\partial_x u, \partial_y u) \\ \nabla v &= (\partial_x v, \partial_y v) \end{aligned}$$

stets senkrecht aufeinander stehen. Genauer kann man sagen, dass

$$\nabla v = (-\partial_y u, \partial_x u).$$

Dies heißt nichts anderes, als dass ∇v aus ∇u durch eine Drehung um 90 Grad in positiver Richtung hervorgeht. Dies hat zur Folge, dass die beiden Kurvensysteme $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ sich immer senkrecht schneiden.

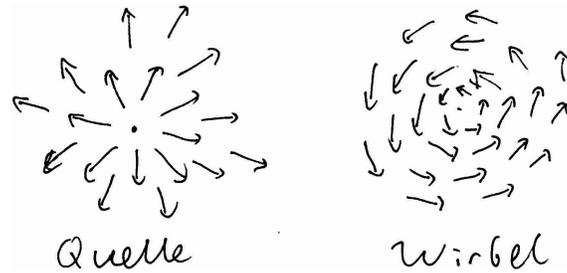
Die Linien $u = \text{const.}$ können als Flusslinien des Vektorfeldes ∇v interpretiert werden. Da

$$\text{div}(\nabla v) = \Delta v = 0,$$

ist dieses Vektorfeld divergenzfrei.

Aus der Analysis-Vorlesungen sollte folgendes geläufig sein: Für ein C^∞ -Vektorfeld $\mathcal{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V} = (P, Q)$, so sagen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \text{ quellenfrei} &\iff \text{div } \mathcal{V} := \partial_x P + \partial_y Q = 0 \\ \mathcal{V} \text{ wirbelfrei} &\iff \text{rot } \mathcal{V} := \partial_x Q - \partial_y P = 0. \end{aligned}$$

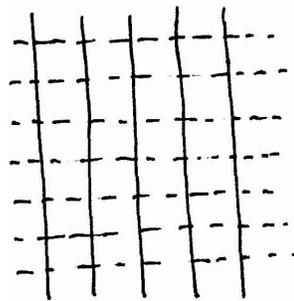


Ein Gradientenvektorfeld ∇u zu einem $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist automatisch wirbelfrei; ∇u ist quellenfrei, genau dann, wenn $\Delta u = 0$.

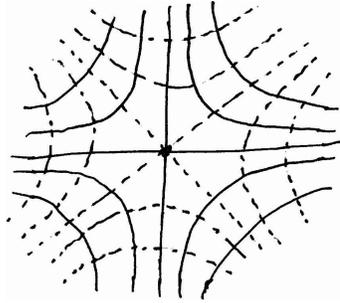
Eine holomorphe Funktion $f = u + iv$ erzeugt also zwei orthogonale quellen- und wirbelfreie Flüsse ∇u und ∇v in U ; die Niveaulinien von v und u sind die Flusslinien von ∇u respektive ∇v .

Wir geben einige Beispiele dieser Niveaulinien für einfache holomorphe Funktionen.

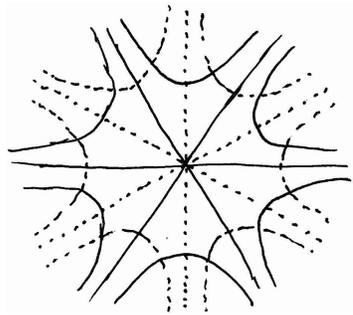
1. $f(z) = z$



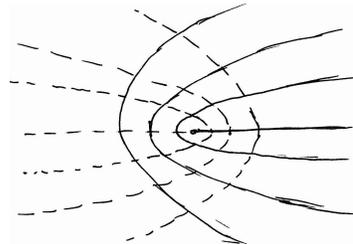
2. $f(z) = z^2$



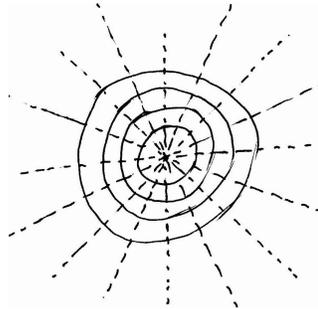
3. $f(z) = z^3$



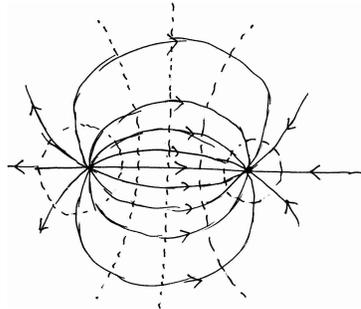
4. $f(z) = \sqrt{z}$



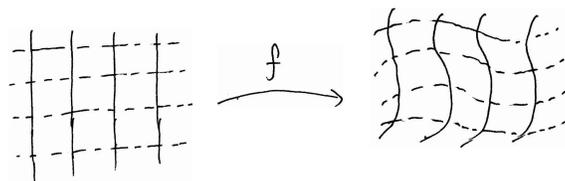
5. $f(z) = \log z$



6. $f(z) = \log z - \log(z - 1)$



Im Allgemeinen werden die orthogonalen Liniensysteme $Re(z) = const.$, $Im(z) = const.$ durch ein holomorphes f auf zwei gekrümmte, orthogonale Liniensysteme abbilden.



Es ist durchaus nützlich, die oben beschriebenen Sachverhalte mit Hilfe von *Differentialformen* auszudrücken. Sind $P, Q : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ -Funktionen und

$$\omega = P dx + Q dy,$$

so schreiben wir

$$*\omega = -Q dx + P dy.$$

Dieser Operator wird *Hodge *-Operator* genannt und entspricht wie vorher einer Drehung um 90 Grad. Ist h eine Funktion, so ist

$$*dh = -\partial_y h dx + \partial_x h dy$$

und somit

$$d * dh = \Delta h \cdot dx dy.$$

Schreiben wir wieder für eine holomorphe Funktion $f = u + iv$, so folgt

$$\begin{aligned} *du &= *(\partial_x u dx + \partial_y u dy) \\ &= -\partial_y u dx + \partial_x u dy \\ &= \partial_x v dx + \partial_y v dy \\ &= dv. \end{aligned}$$

Also

$$*du = dv.$$

Und

$$d * du = d dv = 0,$$

so dass in der Tat

$$\Delta u = 0.$$

Ist u eine harmonische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U , so finden wir durch Integration eine Funktion

$$v(x, y) := \int_a^{(x,y)} *du,$$

für die gilt $dv = *du$. Es ist dann

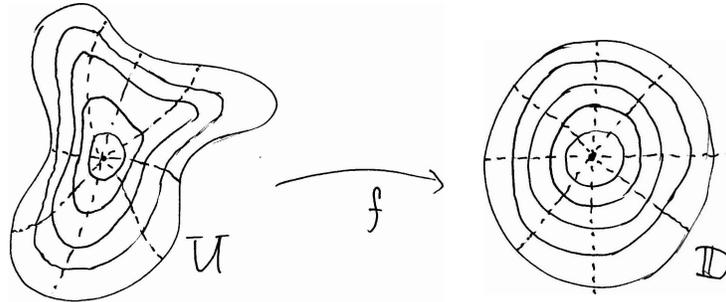
$$u + iv \in \mathcal{O}(U).$$

Diese Funktion v nennt man eine zu u *konjugierte Funktion*.

(1.10) Das Dirichletsche Prinzip

Riemann benutzt bei der Begründung des Abbildungssatzes folgende Idee:

Wir nehmen einfachheitshalber an, dass U ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand ∂U ist, und $0 \in U$. Wir suchen einen Biholomorphismus $f : U \rightarrow \mathbb{D}$, mit $f(0) = 0$.



Die Niveaulinien von $\operatorname{Re} \log f = \log |f|$ in U sind dann die Urbilder unter f von konzentrischen Kreisen in \mathbb{D} mit Mittelpunkt 0.

Riemann konstruiert f mit Hilfe des folgenden Satzes:

Der Randwertsatz

Zu einer stetigen Funktion $h : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ existiert ein Funktion

$$a : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

1. $\Delta a = 0$ auf U
2. $a|_{\partial U} = h$.

Wir können also eine in U harmonische Funktion a finden, welche vorgegebene Randwerte h annimmt.

Die gesuchte Funktion a wird durch Anwendung des sogenannten DIRICHLETschen Prinzips, welches a aus einer Minimaleigenschaft gewinnt. Betrachte dazu den Funktionenraum

$$\mathcal{F} = C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$$

aller stetigen Funktionen auf \bar{U} , welche im Inneren von U zweimal stetig differenzierbar sind. Auf \mathcal{F} definieren wir das Dirichlet-Skalarprodukt

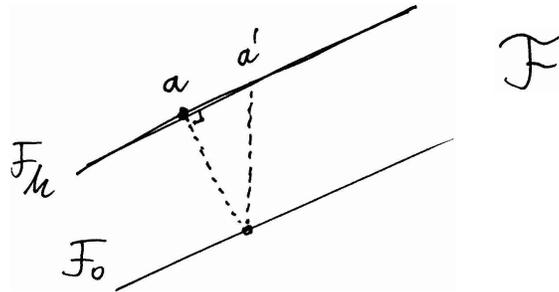
$$(f, g)_D := \int_U df \wedge *dg = \int_U (\Delta f \cdot \Delta g) dx \cdot dy.$$

Die Menge

$$\mathcal{F}_h = \{f \in \mathcal{F} \mid f|_{\partial U} = h\} \subset \mathcal{F}$$

ist ein affiner Unterraum zum Untervektorraum

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f|_{\partial U} = 0\} \subset \mathcal{F}.$$



Wir suchen nun ein $a \in \mathcal{F}_h$ für das $\|a\| := (a, a)_D^{1/2}$ minimal ausfällt. Ein $a' \in \mathcal{F}_h$ ist von der Form $a + \phi$, wobei $\phi \in \mathcal{F}_0$. Dann ist

$$\|a + \lambda\phi\|^2 = \|a\|^2 + \lambda^2 \|\phi\|^2 + 2\lambda(a, \phi).$$

Hieraus sehen wir, dass $\|a\|$ gerade dann minimal ist, wenn $(a, \phi) = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{F}_0$.

Erinnert sei hier an die *Greensche Formel*

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} f * dg &= \int_U d(f * dg) \\ &= \int_U df \wedge *dg + \int_U f d * dg. \end{aligned}$$

Für $f = \phi \in \mathcal{F}_0$, $g = a$ steht hier

$$0 = (\phi, a) + \int_U (\phi \cdot \Delta a) dx dy$$

Hieraus folgt:

$$\Delta a = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad (\phi, a) = 0 \quad \text{für alle} \quad \phi \in \mathcal{F}_0.$$

Das heißt aber, dass unser gesuchtes a einen $\| \cdot \|$ -Minimierer ist.

Vor allem WEIERSTRASS hat auf die Probleme mit dieser Schlussweise aufmerksam gemacht: es ist gar nicht klar, dass so ein $\| \cdot \|$ -minimierendes Element $a \in \mathcal{F}_h$ existiert!



Die Intuition von RIEMANN, dass dies in dieser Situation trotzdem zutrifft, wurde später durch HILBERT bestätigt.

Wir zeigen nun, wie der Randwertsatz benutzt werden kann, um einen Biholomorphismus

$$f : U \longrightarrow \mathbb{D}$$

zu konstruieren. Die Funktion

$$u = \log(|f|) : U \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

hat dann folgende Eigenschaften

1. $\Delta u = 0$ auf $U \setminus \{0\}$.
2. u hat eine logarithmische Singularität bei 0. Das heißt, wir können

$$u = \log r - a$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und a beschränkt bei 0 schreiben.

3. $h|_{\partial U} = 0$

Es ist dann $a = \log(r) - u$ und es folgt $\Delta a = 0$ und $a|_{\partial U} = \log r$. Solch ein a finden wir mit dem Randwertsatz aus dem Dirichletschen Prinzipip.

Haben wir einmal a , so haben wir auch $u = \log(r) - a$. Wir bestimmen eine zu u konjugierte Funktion durch Integration: $v = \int *du$. Die Funktion $g := u + iv$ ist dann holomorph auf $U \setminus S$, wobei S ein Schlitz von 0 zum Rand ∂U ist. Die Funktion $f := \exp(g)$ ist jedoch holomorph auf U und löst unsere Aufgabe!

§2. Riemannsche Flächen

5. Vorlesung,
Mittwoch,
09.11.2011
(8-10 Uhr)

Unter einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit verstehen wir einen topologischen Raum M mit folgenden Eigenschaften:

1. M ist *lokal euklidisch*, d. h. für alle $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$ von a und ein Homöomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.
2. M ist *hausdorffsch*, d. h. für alle $a \neq b \in M$ existieren offene Umgebungen U von a und V von b so, dass $U \cap V = \emptyset$.
3. Die Topologie auf M besitzt eine *abzählbare Basis*. Nach Sätzen aus der Topologie ist dies gleichbedeutend mit der *Metrisierbarkeit* von M .

(2.1) Definitionen Eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit X wird zur *Riemannschen Fläche*, wenn wir auf X eine *komplexe Struktur* Σ festlegen. Um zu erklären, was genau eine komplexe Struktur ist, müssen wir etwas weiter ausholen.

- Eine *komplexe Karte* auf X ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : U \longrightarrow V,$$

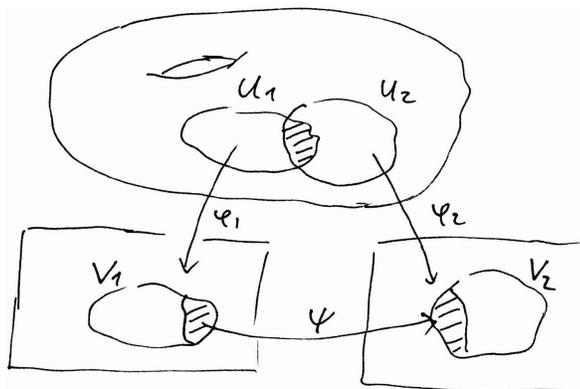
wobei $U \subset X$ und $V \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen bezeichnen.

- Zwei komplexe Karten $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ sind (biholomorph) *verträglich*, wenn die „Umkartungsabbildung“

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

biholomorph ist.

Hierzu gehört das übliche Bild einer Umkartung aus der Theorie der Mannigfaltigkeiten:



- Ein *komplexer Atlas* auf X ist eine Kollektion

$$\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

von paarweise verträglichen komplexen Karten $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$, $\alpha \in I$, mit der Eigenschaft, dass die Kartengebiete U_α die Menge X gänzlich überdecken:

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X.$$

I ist dabei eine Indexmenge, welche die Karten im Atlas indiziert.

- Zwei komplexe Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{A}' heißen *äquivalent*, wenn $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ ein komplexer Atlas ist, d. h. wenn die Karten aus \mathcal{A} mit den Karten aus \mathcal{A}' verträglich sind. Man verifiziere, dass dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.
- Eine *komplexe Struktur* Σ auf X ist eine Äquivalenzklasse von komplexen Atlanten.
- Eine *Riemannsche Fläche* ist ein Paar (X, Σ) , wobei X eine zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und Σ eine komplexe Struktur auf X ist.

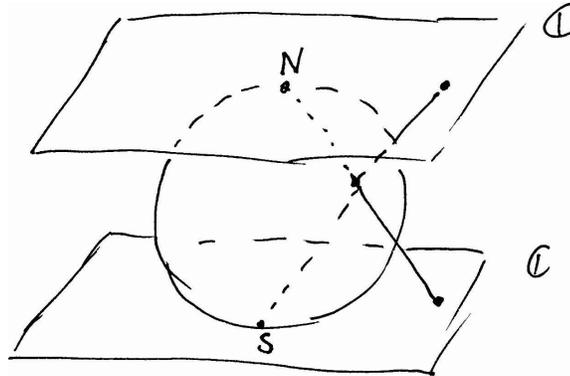
Jeder komplexe Atlas auf X bestimmt eine komplexe Struktur Σ und somit eine wohldefinierte Riemannsche Fläche (X, Σ) . Zwei solche Atlanten bestimmen genau dann dieselbe Riemannsche Fläche, wenn ihre Karten gegenseitig verträglich sind. Indem wir zu einem komplexen Atlas \mathcal{A} alle mit \mathcal{A} verträglichen Karten hinzufügen, erhalten wir einen *maximalen Atlas* \mathcal{A}^* und jede komplexe Struktur enthält genau einen maximalen komplexen Atlas, so dass wir statt mit den komplexen Strukturen Σ genau so gut mit maximalen Atlanten arbeiten könnten. In der Praxis will man aber natürlich mit Atlanten mit möglichst wenig Karten arbeiten.

Wie üblich schreiben wir kurz X statt (X, Σ) , wenn klar ist, welche komplexe Struktur Σ gemeint ist.

Wir beschreiben hier die einfachsten Beispiele von Riemannschen Flächen:

1. $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{A} = \{\text{Id} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\}$. \mathcal{A} ist ein komplexer Atlas mit nur einer Karte. Hierdurch wird X zu einer Riemannschen Fläche. Der komplexer Atlas $\mathcal{B} = \{\text{conj} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}\}$ ist nicht mit \mathcal{A} verträglich und definiert einen *anderen* komplexen Struktur auf \mathbb{C} .
2. Ist X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ eine offene, zusammenhängende Teilmenge (d. h. ein Gebiet in X), so liefert der komplexe Atlas von X durch Einschränkung auf Y einen komplexen Atlas auf Y . In natürlicher Weise wird so Y auch zu einer Riemannschen Fläche. Insbesondere trifft dies auf alle Gebiete $U \subset \mathbb{C}$ zu.

3. Das einfachste Beispiel einer kompakten Riemannschen Fläche ist die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1 := \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx S^2$. Durch stereographische Projektion vom Nord- und Südpol der Kugel erhalten wir einen Atlas mit zwei komplexen Karten.



$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 &= S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_2 : U_2 &= S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

Der Schnitt $U_1 \cap U_2 = S^2 \setminus \{N, S\}$ wird durch φ_1 und φ_2 auf die Menge $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet. Man rechnet nach, dass die Umkartungsabbildung

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

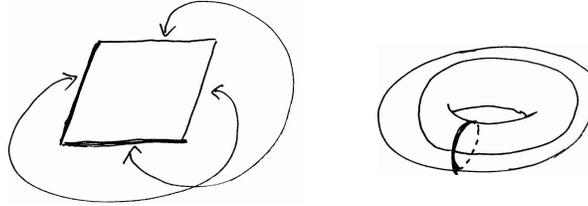
genau durch $z \mapsto 1/z$ gegeben wird. Da dies ein Biholomorphismus ist, sind φ_1 und φ_2 verträglich und wir erhalten einen komplexen Atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Dies liefert eine komplexe Struktur Σ auf S^2 .

6. Vorlesung, Freitag,
11.11.2011
(8-10 Uhr)

4. Sind ω_1, ω_2 zwei über \mathbb{R} linear unabhängige komplexe Zahlen, so bestimmen sie ein Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$. Dieses Gitter bestimmt eine Äquivalenzrelation \sim_Γ auf \mathbb{C} , indem wir

$$z \sim_\Gamma z' \iff z - z' \in \Gamma$$

setzen. Die Menge $\mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{C}/\sim_\Gamma$, versehen mit der Quotiententopologie, ist homöomorph zum Torus: jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist \sim_Γ zu genau einem $z' \in \mathcal{P}_\alpha$; im Rand $\partial\mathcal{P}_\alpha$ werden entsprechende Punkte identifiziert.

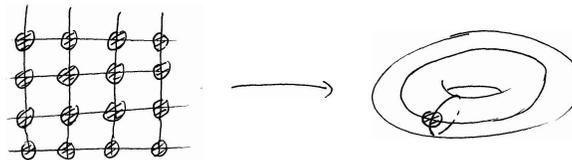


Um einen komplexen Atlas auf \mathbb{C}/Γ anzugeben, sei zuerst an den Begriff der *Überlagerung* erinnert. Ist $\pi : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, so heißt π eine Überlagerung, wenn für alle $p \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ existiert, für die

$$\pi^{-1}(U) = \coprod V_i \quad (\text{disjunkte Vereinigung})$$

und $\pi_i := \pi|_{V_i} : V_i \xrightarrow{\approx} U$ gilt.

Die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ ist so eine Überlagerung.



Setze $V_\alpha = \mathcal{P}_\alpha^0 \subset \mathbb{C}$, $U_\alpha := \pi(V_\alpha)$ und sei $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ die Inverse zu $\pi|_{U_\alpha}$. Wir erhalten so einen komplexen Atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha; \alpha \in \mathbb{C}\}$.

Überlegen Sie genau, was die Umkartungen in diesem Beispiel sind.

Angemerkt sei hier noch, dass $\Gamma \subset \mathbb{C}$ auch eine *Untergruppe* von \mathbb{C} ist. Die Quotienten-Menge \mathbb{C}/Γ ist also auch als Faktorgruppe von \mathbb{C} aufzufassen. Die Riemannsche Fläche $E(\Gamma) := \mathbb{C}/\Gamma$ besitzt also auf natürliche Weise die Struktur einer abelschen Gruppe.

Wann sehen wir zwei Riemannsche Flächen als gleich an?

Definition: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Riemannschen Flächen x und y heißt *holomorph*, wenn für alle komplexen Karten

$$\begin{aligned} \varphi_1 & : U_1 \rightarrow V_1 \\ \varphi_2 & : U_2 \rightarrow V_2 \end{aligned}$$

mit $f(U_1) \subset U_2$, die Abbildung $g = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$ holomorph ist. Eine holomorphe Bijektion heißt *Biholomorphismus*; die inverse Abbildung ist automatisch holomorph.

Wir erhalten so die *Kategorie der Riemannschen Flächen*. Die Objekte sind Riemannsche Flächen, die Morphismen sind holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen.

Identitätssatz

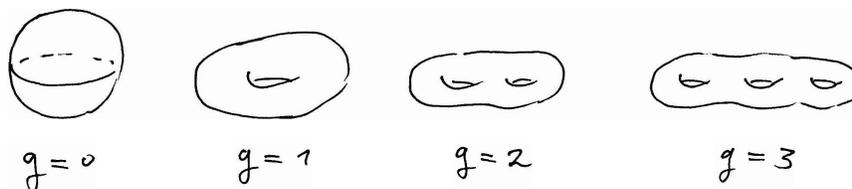
Sind $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ holomorphe Abbildungen und ist $A \subset X$ eine Menge mit Häufungspunkt und ist außerdem $f_1|_A = f_2|_A$, dann ist $f_1 = f_2$.

Dies ist dem Leser als Aufgabe überlassen: man zeige, dass die Menge $G = \{p \in X \mid f_1(p) = f_2(p)\}$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Mit Karten lässt sich die Aussage zurückführen auf den Identitätssatz für holomorphe Funktionen aus §1.

Welche 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten kann man mit einer komplexen Struktur versehen? Und auf wie viele Weisen?

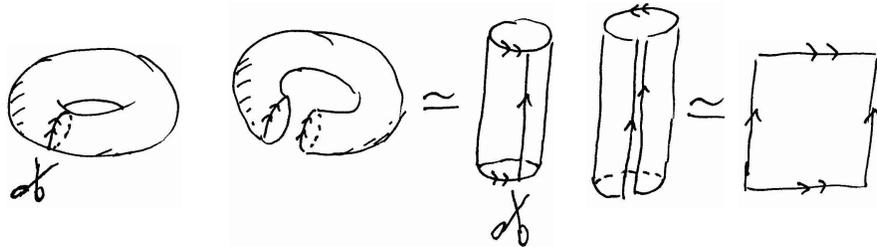
Da die Umkartungsabbildungen Biholomorphismen sind und die Jacobi-Determinante immer > 0 ist, folgt, dass jede Riemannsche Fläche eine *orientierbare* Mannigfaltigkeit ist; auf dem Möbiusband, der KLEINSchen Flasche und der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ existiert somit keine komplexe Struktur. Es stellt sich heraus, dass die Orientierbarkeit die einzige Bedingung an eine Fläche darstellt.

In der Vorlesung werden wir uns vor allem mit *kompakten* Riemannschen Flächen beschäftigen. Die zusammenhängenden, kompakten und orientierbaren Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 werden durch eine einzige Zahl g , den *Genus* oder *Geschlecht*, charakterisiert.



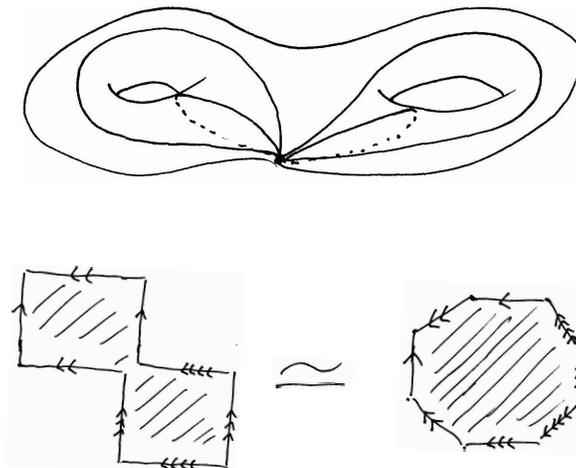
Riemann führt diese Zahl über die Anzahl von Schnitten ein, welche man benötigt, um die Fläche in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln.

Bei der Sphäre ($g = 0$) sind keine Schnitte nötig, da diese schon einfach zusammenhängend ist. Für den Torus ($g = 1$) brauchen wir zwei Schnitte.



Durch Zurückkleben erhalten wir aus dem Rechteck den Torus.

Wie ist es bei einer Fläche mit $g = 2$? Es geht mit 4 Schnitten:



Durch Ausklappen erhalten wir ein 8-Eck; die Kanten werden in Paaren zusammen geklebt.

Allgemein kann man eine Fläche vom Geschlecht g mit $2g$ Schnitten in ein $4g$ -gon verwandeln. Es ist aber oft schwierig mit solchen Definitionen zu arbeiten;



LEONHARD EULER
(1707-1783)

einfacher ist die Einführung mit Hilfe der *Euler-Charakteristik*:

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$

Ist X trianguliert, so ergibt sich

$$\chi(X) = E - K + F,$$

wobei E , K und F für die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen in der Triangulierung stehen. Für die Triangulierung von S^2 bekommen wir

$$2 = E - K + F$$

Das ist der EULERSche Polyedersatz.

Wir werden später sehen:

Auf $X = S^2$ gibt es (bis auf Biholomorphe Äquivalenz) nur eine komplexe Struktur. Die komplexen Strukturen auf $X = S^1 \times S^1$ sind biholomorph zu $E(\Gamma)$ für ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

Es gilt

$$E(\Gamma_1) \simeq E(\Gamma_2) \iff j(\Gamma_1) = j(\Gamma_2),$$

wobei $j(\Gamma) \in \mathbb{C}$ die sogenannte *j-Invariante* des Gitters bezeichnet .

Flächen mit $g \geq 2$ besitzen komplexe Strukturen, die von $3g - 3$ komplexen Parametern abhängen. Es existiert ein sogenannter Modulraum \mathcal{M}_g der Dimension $3g - 3$, welcher genau die komplexen Strukturen auf einer Fläche vom Geschlecht g parametrisiert. Dieser Raum \mathcal{M}_g ist Gegenstand intensiver aktueller Forschung.

(2.2) Holomorphe & Meromorphe Funktionen

Definition: Sei $U \subset X$ eine offene Menge in einer Riemannschen Fläche X . Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn für alle Karten $\varphi : U' \rightarrow V$ gilt, dass

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph im üblichen Sinne ist.

Notation: $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$. Die Menge $\mathcal{O}_X(U)$ hat auf natürliche Weise die Struktur einer \mathbb{C} -Algebra.

Als Aufgabe überlege man sich, dass $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann holomorph als Funktion ist, wenn dies für $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ als Abbildung zwischen Riemannschen Flächen gilt.

7. Vorlesung,
Mittwoch,
16.11.2011
(8-10 Uhr)

Definition: Sei X eine Riemannsche Fläche und $p \in X$.

Eine Karte $z : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ mit $z(p) = 0$ heißt *lokaler Parameter bei p* .

Offenbar kann man für jedes $p \in X$ unendlich viele lokale Parameter wählen.

Ist $z : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ lokaler Parameter bei p und $f \in \mathcal{O}(U)$, so ist die Funktion $f \circ z^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und besitzt eine Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{C}\{t\}$. Für alle $q \in U$ gilt dann

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z(q)^n.$$

Wir sagen, dass f in dem lokalen Parameter als „ $f = \sum a_n z^n$ “ entwickelt werden kann.

Ist $w : U \rightarrow \tilde{V}$ ein weiterer lokaler Parameter bei p , so haben wir ebenfalls eine Entwicklung $f = \sum b_n w^n$. Die Beziehung zwischen a_n und b_n wird durch die Entwicklung von w in z

$$w = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots$$

oder von z in w

$$z = \beta_1 w + \beta_2 w^2 + \dots$$

ausgedrückt: Es ist natürlich

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots &= b_0 + a_1(\beta_1 w + \beta_2 w^2 + \dots) + a_2(\beta_1 w + \dots)^2 + \dots \\ b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots &= a_0 + a_1(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots) + a_2(\alpha_1 z + \dots)^2 + \dots, \end{aligned}$$

woraus die b_n aus den a_n bestimmt werden können.

Ist etwas allgemeiner $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$ und hat f eine konvergente Entwicklung der Form

$$f(q) = \sum_{n \geq -N} a_n z(q)^n,$$

so sagen wir, dass f *meromorph* bei p ist.

Wir setzen wieder

$$v_p(f) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}.$$

Ist $v_p(f) < 0$, so sagen wir, dass p eine Polstelle von f ist. Eine Polstelle liegt genau dann vor, wenn $\lim_{q \rightarrow p} |f(q)| = \infty$.

Definition: Sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subset X$ eine offene Menge. Eine *meromorphe Funktion* auf U ist ein $f \in \mathcal{O}(U')$, wobei $U' \subset U$ und $U \setminus U'$ diskret, so dass f in $p \in U \setminus U'$ eine Polstelle besitzt.

Die Menge aller meromorphen Funktionen auf U notieren wir $\mathcal{M}(U)$ und diese hat offensichtlich die Struktur einer \mathbb{C} -Algebra. Die Menge $\mathcal{M}(X)$ ist ein Körper.

Für $f \in \mathcal{M}(X)^*$ sind die Menge der Polstellen $P(f)$ und Nullstellen $N(f)$ stets diskret. Ist X kompakt, so sind $N(f), P(f)$ also *endlich*. Ist $f \in \mathcal{M}(X)$, so ist $f : U' \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei $U' = X \setminus P(f)$. Wir können f wie in (1.2) zu einer Abbildung

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$$

erweitern, indem wir $f(p) = \infty$ für $p \in P(f)$ setzen.

Satz: Ist $f \in \mathcal{M}(X)$, so ist $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ holomorph. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ holomorph, so ist entweder $f^{-1}(\infty) = X$ oder $f^{-1}(\infty) \subset X$ ist diskret und f ist meromorph auf $U' = X \setminus f^{-1}(\infty)$.

Die Funktion $v_p : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ hat formal dieselben Eigenschaften wie in (1.3). Allerdings ist es nicht klar, ob es *überhaupt nicht konstante meromorphe Funktionen auf jeder Riemannschen Fläche gibt*. Wir werden später die Existenz aus dem *Satz von Riemann-Roch* folgern.

Definition: Ist $f \in \mathcal{M}(X)^*$, so definieren wir den *Divisor von f* als

$$(f) := \sum_{P \in X} v_P(f)P \in \text{Div}(X).$$

Die Gruppe der Divisoren ist wie vorher definiert und natürlich gilt wieder $(f \cdot g) = (f) + (g)$.

Wir betrachten jetzt als Beispiel die Funktion

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t}.$$

Wir fassen dies als $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ auf und bestimmen für alle $p \in \mathbb{P}^1$ die Ordnung $v_p(f)$. Wir erhalten direkt

$$v_0(f) = 2, v_1(f) = -1, v_p(f) = 0 \quad p \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Was ist $v_\infty(f)$? Entwickle dazu f in eine Potenzreihe in $z = 1/t$; dies ist ein lokaler Parameter bei $t = \infty$.

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{1-t} &= \frac{-t}{1-1/t} = -t \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{z} \left(1 + z + z^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Das heisst: $v_\infty(f) = -1$, sodass

$$(f) = 2 \cdot \underline{0} - 1 \cdot \underline{1} - 1 \cdot \infty$$

Für eine allgemeine rationale Funktion haben wir

$$\begin{aligned} f(t) &= \prod_{i=1}^n (t - \alpha_i) / \prod_{i=1}^m (t - \beta_i) \\ &= t^n \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\alpha_i}{t} \right) t^{-m} \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{\beta_i}{t} \right)^{-1} \\ &= t^{n-m} \left(1 + \dots \frac{1}{t} + \dots \frac{1}{t^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

In dem lokaler Parameter $z = 1/t$ bei $t = \infty$ haben wir somit:

$$f = z^{m-n} \left(1 + \dots z + \dots z^2 + \dots \right),$$

und wir lesen ab:

$$v_\infty(f) = m - n.$$

Insgesamt:

$$(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{j=1}^m \beta_j + (m - n)\infty$$

Bemerke, das immer $\text{Grad}((f)) = n - m + m - n = 0$.

Satz

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(t)$$

Beweis: Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass ∞ keine Polstelle von f ist: betrachte sonst $1/f$. Die Funktion f besitzt also

endlich viele Polstellen $p_i \in \mathbb{C}$. Sei $h_i = H_{p_i}(f)$ der Hauptteil von f in p_i . Die Funktion $\tilde{f} = f - \sum h_i$ ist eine meromorphe Funktion ohne Polstellen. \tilde{f} ist somit holomorph und beschränkt auf \mathbb{C} . Nach dem Satz von LIOUVILLE ist \tilde{f} konstant. Es folgt, dass $f = \tilde{f} + \sum h_i$ eine rationale Funktion ist. \square

8. Vorlesung, Freitag, 18.11.2011 (8-10 Uhr)

(2.3) Analytische Funktionen „im Großen“

Die analytische Fortsetzung einer Potenzreihe führt im Allgemeinen zu „mehrwertigen Funktionen“. Es war RIEMANN'S Idee, solche Objekte als einwertige, holomorphe Funktionen auf eine sich mehrfach über die Zahlenebene erstreckende Fläche zu interpretieren.

Wir erinnern kurz an den Prozess der analytischen Fortsetzung mit Hilfe von *Kreisketten*.

Betrachte die Potenzreihe

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$$

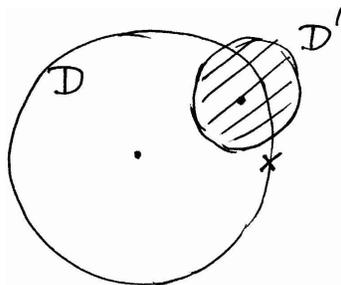
Der Konvergenzradius dieser Reihe ist 1 und sie stellt auf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Funktion $f(z) = 1/(1-z)$ dar: die geometrische Reihe.

Ist $b \in D$, so können wir $f(z)$ in eine Potenzreihe von b entwickeln:

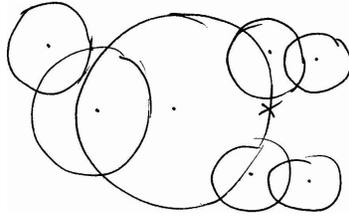
$$f(z) = a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \dots$$

Es ist $a_0 = f(b) = 1/(1-b)$, $a_1 = f'(b) = 1/(1-b)^2$ und allgemein $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)$.

Der Konvergenzradius dieser Reihe wird bestimmt durch den Abstand von b zu der Polstelle bei $z = 1$ und ist somit $|b-1|$. Wenn $|b| + |1-b| > 1$, dann ragt $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-b| < |b-1|\}$ aus D hinaus:



Wir erhalten so eine holomorphe Funktion auf dem größeren Definitionsgebiet $D \cup D'$. Wir können nun $b' \in D'$ wählen und die Prozedur wiederholen:

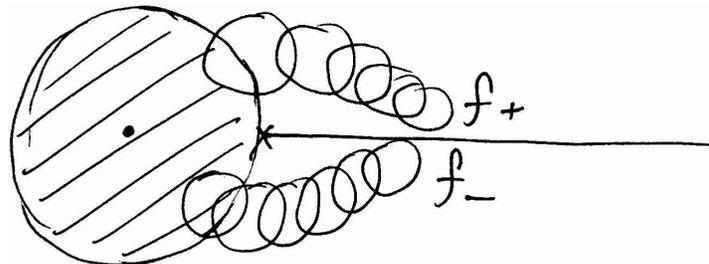


Auf diese Weise lässt sich die durch die Potenzreihe definierte Funktion über das ursprünglichen Konvergenzgebiet hinaus erweitern. Im obigen Fall erhalten wir die Funktion $f(z) = 1/(1-z)$ auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Betrachte nun die Potenzreihe

$$f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots$$

Auf der Kreisscheibe $D = \{|z| < 1\}$ stellt dies den Logarithmus $-\log(1-z)$ dar. Die Fortsetzungen längs der verschiedenen Kreisketten liefern aber nicht immer den gleichen Wert:



Für $z \in \mathbb{R}, z > 1$ wird $f_- - f_+ = 2\pi i$ sein. Ähnliches passiert bei der binomischen Reihe

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}z^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} z^n, \end{aligned}$$

wenn $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Die Reihe stellt auf $\{|z| < 1\}$ die Funktion $(1-z)^\alpha$ dar und hier ist

$$f_- = e^{2\pi i \alpha} \cdot f_+.$$

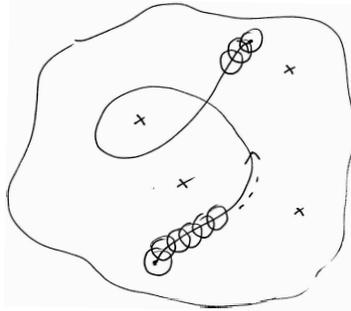
Solche „mehrdeutigen Funktionen“ sind weit verbreitet und stellen gewissermaßen den Regelfall dar.

Eine Situation von großer praktischer Bedeutung entsteht beim Auflösen von Systemen von linearen Differentialgleichungen mit nicht-konstanten meromorphen Koeffizienten. Betrachte eine Matrix $A(z) \in \text{Mat}(n \times n, \mathcal{M}(\mathbb{C}))$ mit meromorphen Koeffizienten. Sei Σ die Menge der Polstellen der Einträge von $A(z)$. Das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dz}y = A(z)y \quad (*)$$

besitzt für jedes $p \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ einen n -dimensionalen Vektorraum \mathbb{L}_p von Lösungen $y(z) \in \mathcal{O}(D)^n$, wobei D eine kleine Kreisscheibe um p ist. Dies ist nichts anderes als der Satz von CAUCHY, welcher besagt, dass das Anfangswertproblem für beliebige $y(p) \in \mathbb{C}^n$ eine eindeutige, holomorphe Lösung besitzt.

Solche Lösungen lassen sich längs beliebiger Wege γ fortsetzen, sofern sie die Menge der Polstellen Σ vermeiden.



Ein solcher Weg γ liefert somit eine Abbildung

$$T_\gamma : \mathbb{L}_{\gamma(0)} \longrightarrow \mathbb{L}_{\gamma(1)}.$$

Diese Abbildung ist linear und hängt nur von der Homotopieklasse von γ ab und wird auch als *Paralleltransport* von Lösungen bezeichnet. Insbesondere erhalten wir für geschlossene Wege γ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ einen Automorphismus

$$T_\gamma : \mathbb{L}_p \longrightarrow \mathbb{L}_p$$

d. h.: $T_\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{L}_p) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Diese Transformation T_γ wird *Monodromie* der Differentialgleichung entlang γ genannt. Nur wenn $T_\gamma = \text{Id}$ für alle Wege γ , sind die Lösungen von (*) eindeutige Funktionen.

Die Beispiele von gebrochenen Potenzen und Logarithmus sind als Spezialfälle dieser Situation anzusehen: für $\frac{dy}{dz} = \frac{\alpha}{z} \cdot y$ erhalten wir Lösungen der Form $c \cdot z^\alpha$. Das System

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

hat $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \log z \end{pmatrix}$ als Basis von Lösungen.

Was sind die Monodromie-Matrizen in diesen Fällen?

9. Vorlesung,
Mittwoch,
23.11.2011
(8-10 Uhr)

Wir beschreiben jetzt eine allgemeine Konstruktion, welche jeder konvergenten Potenzreihe P eine Riemannsche Fläche zuordnet, die genau die verschiedenen analytischen Fortsetzungen von P erfasst.

Eine Potenzreihe

$$\sum a_n(z-a)^n$$

wird vollständig festgelegt durch den Entwicklungspunkt a und die Folge $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seiner Koeffizienten. Wir betrachten den Folgenraum

$$\mathcal{F} = \{(a, (a_n)) \mid a, a_n \in \mathbb{C}\}$$

und die Teilmenge

$$\mathcal{M} = \{(a, (a_n)) \in \mathcal{F} \mid \exists \rho > 0 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty\} \subset \mathcal{F}$$

der konvergenten Potenzreihen.

Ein $P \in \mathcal{M}$ besitzt einen Konvergenzradius $r_P > 0$ und eine Konvergenzscheibe $D_P := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r_P\}$.

Für $0 < \epsilon < r_P$ setzen wir

$$B_\epsilon(P) := \left\{ Q = (b, (b_n)) \mid \begin{array}{l} 1) \quad |a-b| < \epsilon \\ 2) \quad \sum a_n(z-a)^n = \sum b_n(z-b)^n \quad \text{für } z \in D_P \cap D_Q \end{array} \right\} .$$

Wir versehen \mathcal{M} mit der Topologie erzeugt von $B_\epsilon(P)$, $P \in \mathcal{M}$, $0 < \epsilon < r_P$ (d. h. die $B_\epsilon(P)$ bilden eine Sub-Basis für die Topologie).

Wir betrachten die kanonische Abbildung

$$\pi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}; (a, (a_n)) \longmapsto a,$$

welche einer Potenzreihe ihren Entwicklungspunkt zuweist.

Proposition:

1. π bildet $B_\epsilon(P)$ homöomorph ab auf $B_\epsilon(a)$.
2. Der topologische Raum \mathcal{M} ist hausdorffsch.

Beweis: Bemerke erst, dass die Abbildung

$$\pi: B_\epsilon(P) \longrightarrow B_\epsilon(a)$$

bijektiv ist: die Koeffizienten von $Q = (b, (b_n)) \in B_\epsilon(P)$ ergeben sich eindeutig aus

$$\sum a_n(z-a)^n = \sum b_n(z-b)^n.$$

Es ist $b_0 = \sum a_n(b-a)^n$, $b_1 = \sum n a_n(b-a)^{n-1}$, etc.

Dass $\pi: B_\epsilon(P) \rightarrow B_\epsilon(a)$ ein Homöomorphismus ist, folgt sofort aus der Definition der Topologie auf \mathcal{M} : die Urbilder von offenen Scheiben $B_\eta(b) \subset B_\epsilon(a)$ sind genau von der Form $B_\eta(Q)$ für ein $Q = (b, (b_n)) \in B_\epsilon(P)$.

Die Topologie auf \mathcal{M} ist hausdorffsch: sind $P = (a, (a_n))$ und $Q = (b, (b_n))$ zwei Punkte mit $a \neq b$, so ist $B_\epsilon(P) \cap B_\epsilon(Q) = \emptyset$, wenn $\epsilon < |a-b|$, da unter π dies auf $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$ abgebildet wird. Ist $a = b$ und $R = (c, (c_n)) \in B_\epsilon(P) \cap B_\epsilon(Q)$, so folgt

$$\sum a_n(z-a)^n = \sum c_n(z-c)^n = \sum b_n(z-b)^n,$$

woraus $a_n = b_n$ folgt. □

Für $P \in \mathcal{M}$ setzen wir

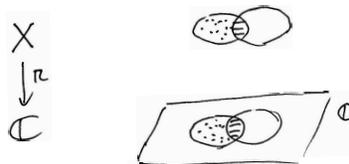
$$X := X(P) := \text{Zusammenhangskomponente von } \mathcal{M} \text{ bei } P.$$

$X(P)$ besteht also genau aus allen Potenzreihen, welche durch analytische Fortsetzung aus P hervorgehen und wird *analytisches Gebilde* oder *analytische Funktion im Großen* genannt.

Die Abbildung $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein lokaler Homöomorphismus. Wir können dies benutzen, um auf X einen komplexen Atlas zu definieren. Wir benutzen die komplexen Karten

$$\pi: B_\epsilon(P) \rightarrow B_\epsilon(a).$$

Die Karten sind holomorph verträglich, da die Umkartungsabbildungen alle die Identität sind!



Um zu zeigen, dass X so zu einer Riemannschen Fläche wird, wäre „bloß“ zu zeigen, dass die Topologie auf X eine abzählbare Basis besitzt.

Überraschenderweise gilt dies automatisch. Dies folgt aus dem

Satz von Rado

Jede Riemannsche Fläche, welche ohne das Abzählbarkeitsaxiom definiert ist, ist triangulierbar.

Die Triangulierbarkeit ist äquivalent zu der Metrisierbarkeit und dies zu der Abzählbarkeit der Topologie.

Auf unserer Riemannschen Fläche ist eine weitere besondere Funktion F definiert

$$F: X \longrightarrow \mathbb{C}, (a, (a_n)) \longmapsto a_0.$$

Diese Funktion ist holomorph auf X , $F \in \mathcal{O}(X)$. Sei nämlich $P = (a, (a_n))$ und $Q = (b, (b_n)) \in B_\epsilon(P)$ ($0 < \epsilon < r_P$), dann ist

$$F(Q) = b_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-a)^n.$$

Die Abbildung $(b, (b_n)) \longmapsto b-a$ ist ein lokaler Parameter bei P und hier steht die Entwicklung von F in diesem lokalen Parameter! F ist also holomorph, da diese Potenzreihe konvergiert.

Wir sehen außerdem, dass die Funktion F die eventuelle Mehrdeutigkeit der Fortsetzungen von P „auflöst“.

(2.4) Riemannsche Fläche einer algebraischen Kurve

Definition: Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{C}^2$ heißt (affine, ebene, algebraische) *Kurve*, wenn es ein Polynom $F \in \mathbb{C}[X, Y]$, $\text{Grad } F \geq 1$ gibt, so dass

$$C = V(F) := \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(a, b) = 0\}.$$

Wir erinnern an die Tatsache, dass ein Polynom $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ eine Darstellung als endliche Summe

$$F = \sum a_{ij} X^i Y^j$$

besitzt. Der *Grad* von F ist definiert als

$$\text{Grad}(F) = \max\{i+j \mid a_{ij} \neq 0\}.$$

Der Ring $\mathbb{C}[X, Y]$ ist faktoriell: Jedes F besitzt eine Zerlegung in irreduzible Faktoren

$$F = F_1 F_2 \dots F_r, \quad F_i \text{ irreduzibel}$$

und diese Schreibweise ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren und Multiplikation mit Einheiten. Die Einheiten in $\mathbb{C}[X, Y]$ sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$. Da $V(GH) = V(G) \cup V(H)$ folgt dann

$$V(F) = V(F_1) \cup V(F_2) \cup \dots \cup V(F_r).$$

Ein Polynom $F = a + bx + cy$ vom Grad 1 enthält drei Koeffizienten und definiert eine Gerade. Polynome vom Grad 2

$$F = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

enthalten 6 Koeffizienten und definieren *Kegelschnitte*. Das Produkt $L_1 \cdot L_2$ zweier Polynome vom Grad 1 definiert einen reduziblen Kegelschnitt. Es ist interessant zu beobachten, wie durch eine kleine Veränderung der Gleichung aus dem Linienpaar eine Hyperbel entsteht. (Wir werden immer reelle Bilder unserer Kurven zeichnen; bedenke aber, dass sich der größte Teil der Kurve ins Komplexe erstreckt.)

Eine Kubik

$$F = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3$$

enthält 10 Koeffizienten und ein Polynom vom Grad d enthält

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2}$$

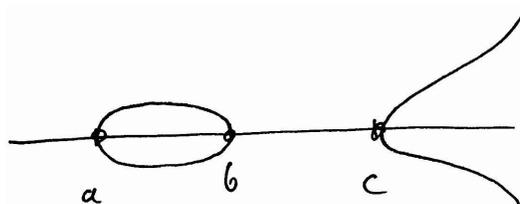
frei zu wählende Koeffizienten.

Kubische Kurven können, wie Quadriken, auf eine gewisse Normalform gebracht werden, was NEWTON erstmals tat.

Die Normalform

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$$

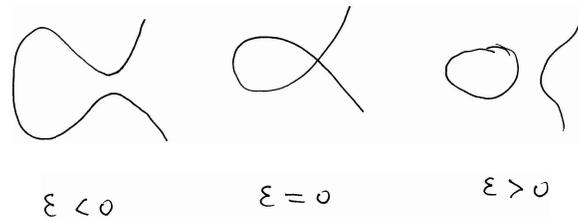
(„divergierende Parabel“) ist sehr nützlich.



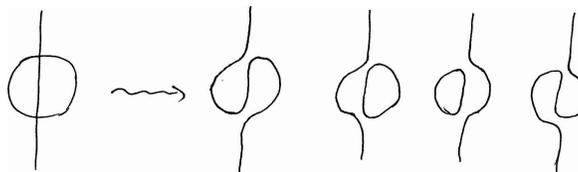
Anhand der Familie

$$y^2 = (x^2 - \epsilon)(x + 1)$$

lässt sich gut beobachten, wie sich die reelle Gestalt der Kurve mit ϵ ändert:



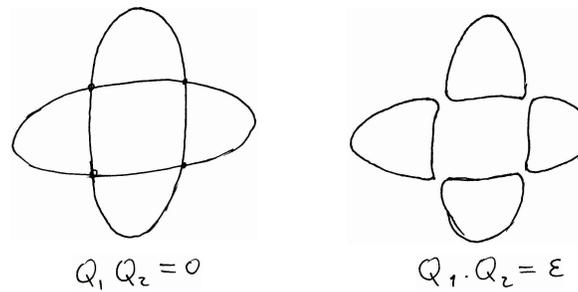
Durch Störung von reduziblen Kubiken wie $x(x^2 - y^2 - 1) = 0$



können verschiedenartige Kurven entstehen. Und durch Störung von $L_1L_2L_3 = 0$



J. PLÜCKER hat mit dieser Methode die unterschiedlichsten Erscheinungsformen von Quartiken (Kurven vom Grad 4) beschrieben:



Die verschiedenen Formen sind vollständig bekannt für Kurven vom Grad ≤ 6 . Bei höheren Graden beginnt die *Terra Incognita*.

Ein Polynom $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ lässt sich als Summe von homogenen Bestandteilen darstellen

$$\begin{aligned} F &= F_0 + F_1 + F_2 + \dots \\ &= a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + \dots \\ &= F(0) + \partial_x F(0)x + \partial_y F(0)y + \dots \end{aligned}$$

Definition: Für ein $F \in \mathbb{C}[X, Y], F \neq 0$ setzen wir

$$\text{Mult}_0(F) := \min\{i + j \mid a_{ij} \neq 0\}.$$

Für $P = (a, b)$ setzen wir

$$\text{Mult}_p(F) := \text{Mult}_0(F(x - a, y - b)).$$

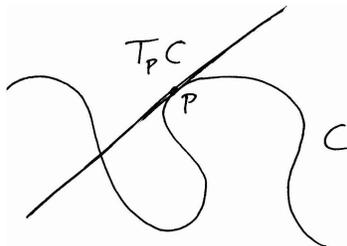
Aus dieser Definition sehen wir, dass

$$\text{Mult}_p(F) = 0 \quad \text{genau dann, wenn } p \notin C = V(F).$$

$$\text{Mult}_p(F) = 1 \quad \text{genau dann, wenn } F(P) = 0 \text{ und } (\partial_x F(p), \partial_y F(p)) \neq (0, 0).$$

Ist also $\text{Mult}_p(F) = 1$, so besitzt C eine wohldefinierte *Tangente* in $P = (a, b)$

$$T_p C := V(\partial_x F(p)(x - a) + \partial_y F(p)(y - b)).$$



Definition:

$$\begin{aligned} p \in V(F) & \quad \text{ist regulär, wenn } \text{Mult}_p(F) = 1, \\ p \in V(F) & \quad \text{ist singulär, wenn } \text{Mult}_p(F) \geq 2. \end{aligned}$$

Die Menge

$$\Sigma = \{p \in C \mid \text{Mult}_p(F) \geq 2\}$$

heißt *singulärer Ort* von C . Es ist

$$\Sigma = V(\partial_x F, \partial_y F, F).$$

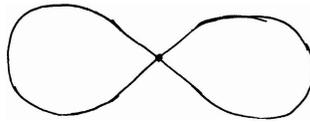
Ist 0 ein Punkt der Multiplizität d , so hat F die Form

$$\begin{aligned} F &= F_d + F_{d+1} + \dots \\ &= a_{d0}x^d + a_{d1}x^{d-1}y + \dots + a_{0d}y^d + \dots \end{aligned}$$

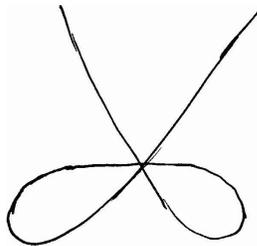
Nach der *homogenen Form des Hauptsatzes der Algebra* lässt sich F_d als Produkt von d Linearfaktoren schreiben

$$F_d = L_1 L_2 \cdots L_d,$$

wobei $L_i = \alpha_i X + \beta_i Y$. Die Geraden $L_i = 0$ heißen *singuläre Tangenten* der Kurve in 0. Entsprechendes gilt natürlich für andere Punkte von C

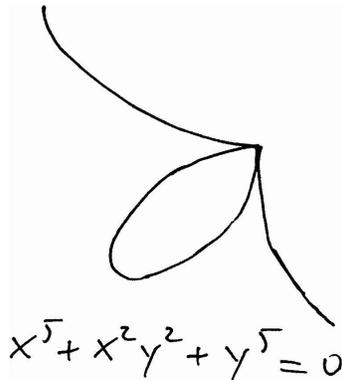


$$y^2 - x^2 + (x^2 + y^2)^2 = 0$$



$$(x^2 - y^2)y + x^4 = 0$$

Die singulären Tangenten in einem Punkt der Kurve können natürlich auch in Gruppen zusammen fallen.



Definition: Ist $\text{Mult}_p(C) = 2$ so heisst p ein *Doppelpunkt* von C . Hat C in p zusätzlich zwei verschiedene singuläre Tangenten, so spricht man von einem *gewöhnlichen Doppelpunkt*. Ist $\text{Mult}_p(C) = 3$ so nennt man p einen *Tripelpunkt*, etc.

Wir werden jetzt sehen, wie die Menge $C \setminus \Sigma$ aller regulären Punkte von C als (Vereinigung von) Riemannsche Fläche(n) aufgefasst werden kann.

Der Satz über implizite Funktionen sagt aus, dass wir für jeden Punkt $P = (a, b) \in \mathcal{H} := \{P \in C \mid \partial_y F(P) \neq 0\}$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ von a und $W \subset \mathbb{C}$ von b und eine Funktion $y: V \rightarrow W; x \mapsto y(x)$ finden so, dass

$$\mathcal{U} := C \cap V \times W = \{(x, y(x)) \mid x \in V\}.$$

In anderen Worten, die Projektion

$$\pi_x: \mathcal{U} \rightarrow V; (x, y) \mapsto x$$

ist eine komplexe Karte für C ; die inverse Abbildung ist $V \rightarrow \mathcal{U}; x \mapsto (x, y(x))$.

Bemerke, dass die Funktion $x \mapsto y(x)$ holomorph ist: es ist

$$\frac{dy}{dx}(a) = -\frac{\partial_x F(P)}{\partial_y F(P)},$$

woraus hervorgeht, dass die zunächst nur C^∞ -Funktion $y(x)$ in der Tat komplex differenzierbar ist.

Die Karten $\mathcal{U} \rightarrow V$ wie oben wollen wir kurz *x-Karten* nennen.

Ganz analog können wir für $P = (a, b) \in \mathcal{V} := \{P \in C \mid \partial_x F(P) \neq 0\}$ in geeigneten Umgebungen $V \subset \mathbb{C}$ von b und $W \subset \mathbb{C}$ von a die Gleichung

$F(x, y) = 0$ nach x auflösen. Wir finden dann eine Funktion $x: V \rightarrow W$, $y \mapsto x(y)$ so, dass

$$\mathcal{U} := C \cap V \times W = \{(x(y), y) \mid y \in V\}.$$

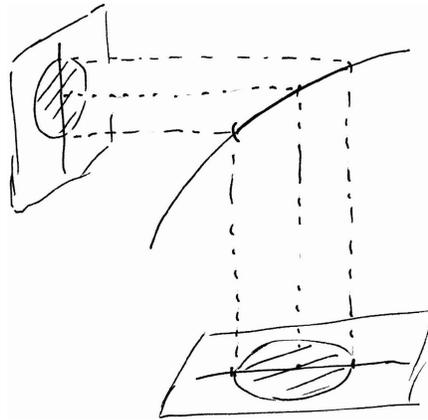
Die Projektion

$$\pi_y: \mathcal{U} \rightarrow V; (x, y) \mapsto y$$

ist eine komplexe Karte mit $y \mapsto (x(y), y)$ als Inverse. Solche Karten nennen wir y -Karten.

Satz: Die oben definierten x - und y -Karten bilden einen komplexen Atlas auf $C \setminus \Sigma$. Die Zusammenhangskomponenten von $C \setminus \Sigma$ erhalten auf diese Weise die Struktur einer Riemannschen Fläche.

Beweis: Da $C \setminus \Sigma = V(\partial_x F, \partial_y F, F)$, gilt $C \setminus \Sigma = \mathcal{H} \cup \mathcal{V}$. $\mathcal{A} = \{x\text{-Karten}\} \cup \{y\text{-Karten}\}$ ist ein komplexer Atlas, weil die Umkartungsabbildungen holomorph sind. Dies ist direkt klar für die Umkartung zwischen zwei x - oder zwei y -Karten, da diese $= \text{Id}$ sind. Einzig interessant sind die Umkartungen zwischen einer x - und einer y -Karte. Aber dies wird genau durch die impliziten Funktionen $x \mapsto y(x)$ oder $y \mapsto x(y)$ angegeben.



□

Es drängt sich die Frage auf, wann $C \setminus \Sigma$ zusammenhängend ist. Wenn $F = G \cdot H$ reduzibel ist, so ist $C = V(G) \cup V(H)$, und weil $V(G) \cap V(H) \subset \Sigma$, folgt, dass

$$C \setminus \Sigma = (V(G) \setminus \Sigma) \sqcup (V(H) \setminus \Sigma).$$

Wir zeigen nun umgekehrt, wenn $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ irreduzibel ist, dass $C \setminus \Sigma$ zusammenhängend ist. Dazu untersuchen wir die Kurve mit Hilfe von vertikalen Schnitten $X = c$.

Wir schreiben F in der Form

$$F = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X) \in \mathbb{C}[X][Y].$$

Setzen wir $x = c$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$F(c, Y) = a_0(c)Y^n + a_1(c)Y^{n-1} + \dots + a_n(c) \in \mathbb{C}[Y].$$

Ist $a_0(c) \neq 0$, so steht hier ein Polynom vom Grad n in Y und dieses hat nach dem Hauptsatz der Algebra n Nullstellen, mit Vielfachheit gezählt. Ist die Diskriminante Δ_F ungleich 0 in c , so haben wir genau n verschiedene Lösungen.

Ist hingegen $a_0(c) = 0$, so finden wir höchstens $n - 1$ Lösungen für y . Setze

$$\begin{aligned} V &:= \{x \in \mathbb{C} \mid A_F(x) \neq 0, \Delta_F(x) \neq 0\} \\ C^0 &:= C \cap (V \times \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Für $c \in V$ besteht $\{F(c, y) = 0\}$ aus genau n verschiedenen Punkten. Genauer erhalten wir aus dem Satz über implizite Funktionen für alle $c \in V$ eine Umgebung $U \subset V$ von c mit

$$C \cap (U \times \mathbb{C}) = \bigsqcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i,$$

wobei $\mathcal{U}_i := \{(x, y_i(x)) \mid x \in U\}$ und die holomorphen Funktionen $y_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ die Gleichung $F(x, y_i(x)) = 0$ erfüllen.

Satz: Ist $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ irreduzibel, so ist C^0 zusammenhängend.

Beweis: Wir schreiben

$$\begin{aligned} F &= a_0(X)Y^n + \dots + a_n(X) \\ &= a_0(X)(Y^n + b_1(X)Y^{n-1} + \dots + b_n) \\ &= a_0(X)f, \end{aligned}$$

wobei $f \in \mathbb{C}(X)[Y]$.

Nach dem Lemma von GAUSS wissen wir, dass

$$F \text{ irreduzibel} \implies f \in \mathbb{C}(X)[Y] \text{ irreduzibel.}$$

Sei $c \in V$ und $U \subset V$ wie oben. Es ist dann

$$\prod_{i=1}^n (Y - y_i(x)) = f(x, Y)$$

für alle $x \in U$, da die normierten Polynome links und rechts die gleichen Nullstellen besitzen.

Angenommen, wir hätten eine Zerlegung

$$C^0 = C^1 \sqcup C^2.$$

Wir betrachten

$$P = \prod_{i \in I} (Y - y_i(x)) \in \mathbb{C}[Y],$$

wobei das Produkt über alle Indizes $i \in I$ genommen wird, für die $y_i(c) \in C^1$ (und $y_i(c) \in C^2$ für $i \notin I$).

Es ist

$$P = Y^m + \beta_1(x)Y^{m-1} + \dots + \beta_m(x).$$

Die Koeffizienten $\beta_i(x) = \pm \epsilon_i(y_i(x))$; $i \in I$ sind als elementar-symmetrische Ausdrücke in den holomorphen Funktionen $y_i(x)$ selber auch holomorph: $\beta_i \in \mathcal{O}(U)$. Ist jetzt $\tilde{c} \in V$ ein weiterer Punkt und $\tilde{U} \subset V$ eine entsprechende Umgebung mit Funktionen $\tilde{y}_i: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$, so erhalten wir ganz analog $\tilde{\beta}_i \in \mathcal{O}(\tilde{U})$.

Es ist aber klar, dass

$$\beta_i |_{U \cap \tilde{U}} = \tilde{\beta}_i |_{U \cap \tilde{U}},$$

also erweitern sich die β_i zu einer globalen holomorphen Funktion auf $U \cup \tilde{U}$. Da dies für alle Umgebungen von allen Punkten von V durchgeführt werden kann, folgern wir, dass es $B_i \in \mathcal{O}(V)$ gibt, mit $B_i|_U = \beta_i$.

Eine weitere Betrachtung lehrt, dass die Grenzwerte

$$\lim_{c \rightarrow a} |y_i(c)| \in \hat{\mathbb{C}}$$

für alle $a \in \hat{\mathbb{C}}$ existieren. Somit existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{c \rightarrow a} |B_i(c)| \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Es folgt, dass $B_i \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(X)$.

Aber offensichtlich ist dann

$$P = Y^m + B_i(x)Y^{m-1} + \dots + B_m(x) \in \mathbb{C}(X)[Y]$$

ein Teiler von f . Da f aber irreduzibel ist, folgt $C^0 = C^1$, d. h. C^0 ist zusammenhängend. \square

10. Vorlesung,
Freitag,
25.11.2011
(8-10 Uhr)

Korollar: Ist F irreduzibel, so ist $X = C \setminus \Sigma$ zusammenhängend.

Dies ist klar, da $C^0 \subset X \subset \overline{C^0}$.

Bemerke, welche merkwürdige Mischung aus Algebra, Topologie und Analysis dieser Beweis ist! Wir haben die Zusammenhang von X bewiesen, ohne einen Weg zwischen zwei Punkten von X zu konstruieren.

(2.5) Differentiale auf Riemannschen Flächen Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Mannigfaltigkeit kann mit Hilfe eines Atlases $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ durch ein System von Funktionen beschrieben werden

$$f_\alpha := f \circ \varphi_\alpha^{-1}: V_\alpha \rightarrow \mathbb{C}.$$

Die f_α sind auf folgende Weise mit den Umkartungs-Abbildungen

$$\psi_{\beta\alpha}: V_{\alpha\beta} \rightarrow V_{\beta\alpha}$$

verträglich:

$$f_\alpha|_{V_{\alpha\beta}} = f_\beta|_{V_{\beta\alpha}} \circ \psi_{\beta\alpha} =: \psi_{\beta\alpha}^*(f_\beta|_{V_{\beta\alpha}}).$$

Hierbei ist $V_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $V_{\beta\alpha} := \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ gesetzt.

Auf ähnliche Weise kann man eine Differentialform auf M als ein System von Differentialformen ω_α auf V_α beschreiben, für die

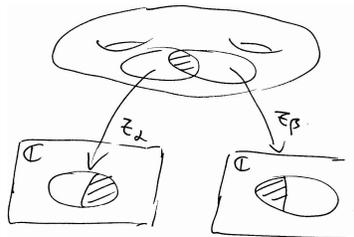
$$\omega_\alpha|_{V_{\alpha\beta}} = \psi_{\beta\alpha}^*(\omega_\beta|_{V_{\beta\alpha}})$$

gilt. Eine Differentialform auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ hat die Form

$$\omega = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n,$$

wobei A_i Funktionen auf V sind. Der Pull-back $\psi^*(\omega)$ von ω unter einer Abbildung $\psi: W \rightarrow V$ wird auf die bekannte Weise durch „Einsetzen“ bestimmt.

Auf ganz analoge Weise können wir ein meromorphes Differential auf einer Riemannschen Fläche als System von meromorphen Differentialen auf Kartengebieten einführen.



In $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ haben wir meromorphe Differentiale

$$\omega_\alpha = f_\alpha(z_\alpha) dz_\alpha,$$

wobei $f_\alpha \in \mathcal{M}(V_\alpha)$.

Es soll gelten „ $\omega_\alpha = \psi_{\beta\alpha}^*(\omega_\beta)$ “. Ausgeschrieben bedeutet dies gerade

$$f_\alpha(z_\alpha)dz_\alpha = f_\beta(z_\beta(z_\alpha)) \frac{dz_\beta}{dz_\alpha} dz_\alpha$$

oder

$$\boxed{f_\alpha(z_\alpha) = f_\beta(z_\beta(z_\alpha)) \frac{dz_\beta(z_\alpha)}{dz_\alpha}}$$

Die meromorphen Differentiale auf X bilden einen Vektorraum $\mathcal{M}^1(X)$ über dem Körper $\mathcal{M}(X)$.

Satz: $\mathcal{M}^1(X)$ ist ein $\mathcal{M}(X)$ -Vektorraum der Dimension 1.

Beweis: Betrachte $\omega^1, \omega^2 \in \mathcal{M}^1(X)$. In Karten $z_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ können wir

$$\omega_\alpha^1 = f_\alpha^1(z_\alpha)dz_\alpha, \quad \omega_\alpha^2 = f_\alpha^2(z_\alpha)dz_\alpha$$

schreiben. Dann ist $\omega_\alpha^1 = \varphi_\alpha \omega_\alpha^2$, $\varphi_\alpha := f_\alpha^1/f_\alpha^2$. Da das System φ_α mit Umkartung verträglich ist, folgt, dass die φ_α eine meromorphe Funktion $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ definieren und somit $\omega^1 = \varphi\omega^2$ gilt. \square

Wir können die *Ordnung* und das *Residuum*

$$v_p(\omega) \in \mathbb{Z}, \quad \text{Res}_p(\omega) \in \mathbb{C}$$

für $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, $p \in X$ mit Hilfe einer Karte definieren; das Ergebnis hängt nicht von der Wahl dieser Karte ab.

Dadurch können wir auch den *Divisor eines meromorphen Differentials* wie üblich definieren:

$$(\omega) = \sum_{p \in X} v_p(\omega) P$$

und die Einteilung in Differentiale der 1., 2. und 3. Art haben auf beliebigen Riemannschen Flächen einen Sinn

$$\omega \text{ erste Sorte} \iff (\omega) \geq 0$$

$$\omega \text{ zweite Sorte} \iff \text{Res}_p(\omega) = 0 \quad \forall p \in X$$

ω dritte Sorte : alle übrigen Fälle

Die Differentiale der 1. Sorte bilden einen \mathbb{C} -Vektorraum, welcher $\Omega^1(X)$ notiert wird. Ist $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ und $\Sigma \subset X$ die Menge der Polstellen von ω und $\gamma: [0,1] \rightarrow X \setminus \Sigma$ ein stückweise differenzierbarer Weg in X , so ist das *Kurvenintegral*

$$\int_\gamma \omega \in \mathbb{C}$$

wohldefiniert; mit Hilfe von $\gamma([0, 1])$ überdeckenden Karten kann das Integral auf Integrale auf Gebiete in \mathbb{C} zurückgeführt werden.

Das Integral $\int_{\gamma} \omega$ hängt nur von der *Homotopieklasse* von γ ab. Integrale $\int_{\gamma} \omega$ über geschlossene Wege werden *Perioden* von ω genannt.

Wir geben einige Beispiele. Betrachten wir zuerst $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = U_1 \cup U_2$ und $\omega = dz$ auf U_1 . Die Umkartung geschieht durch $z = 1/w$. In U_2 erhalten wir $\omega = d\left(\frac{1}{w}\right) = -w^{-2}dw$. Wir sehen: ω ist holomorph auf U_1 und hat einen Pol der Ordnung 2 in $\infty \in U_2$. Also $(\omega) = -2\infty$.

Nehmen wir $\omega = \frac{dz}{z}$ auf U_1 , so ist $\omega = -\frac{dw}{w}$ auf U_2 .

Wir sehen $(\omega) = -1 \cdot \underline{0} - 1 \cdot \underline{\infty}$.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Riemannsche Fläche zu der algebraischen Kurve

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

und das Differential

$$\omega = \frac{dx}{\sqrt{(x - a)(x - b)(x - c)}} = \frac{dx}{y}.$$

Für alle $p = (x, y) \in \mathbb{C}$ mit $y \neq 0$ ist ω offensichtlich holomorph. Es scheint auf den ersten Blick, dass ω eine Polstelle in den Punkten $(a, 0)$, $(b, 0)$ und $(c, 0)$ besitzt. Aber in der Nähe dieser Punkte müssen wir y als lokalen Parameter nehmen und wir können in der Umgebung von $(a, 0)$ schreiben

$$\begin{aligned} x &= a + a_2y^2 + a_3y^3 + \dots \\ \omega &= \frac{dx}{y} = \frac{d(a + a_2y^2 + a_3y^3 + \dots)}{y} \\ &= (2a_2y + 3a_3y^2 + \dots) \frac{dy}{y} = (2a_2 + 3a_3 + \dots) dy, \end{aligned}$$

so dass ω auch in $(a, 0)$ holomorph ist. Ganz analog verhalten sich die Dinge bei $(b, 0)$ und $(c, 0)$.

Wir werden später sehen, wie wir eine algebraische Kurve zu einer kompakten Riemannschen Fläche C^* kompaktifizieren können. In oben stehendem Fall passiert dies durch Hinzunahme eines einzigen Punktes ∞ , wo x und y unendlich werden. In einem lokalen Parameter t bei ∞ lassen sich x und y in eine LAURENT-Reihe entwickeln;

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t^2} + \dots \\ y(t) &= \frac{1}{t^3} + \dots \end{aligned}$$

Ausgedrückt in t finden wir dann

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{dx}{y} = \frac{d\left(\frac{1}{t^2} + \dots\right)}{\frac{1}{t^3} + \dots} = \frac{\left(-\frac{2}{t^3} + \dots\right) dt}{\left(\frac{1}{t^3} + \dots\right)} \\ &= (-2 + \dots) dt.\end{aligned}$$

Insgesamt sehen wir $\nu_p(\omega) = 0$ für alle $p \in C^*$, d. h. $(\omega) = 0!$

Es ist von Interesse, diese Rechnung für hyperelliptische Kurven C mit der Gleichung

$$\begin{aligned}y^2 &= x^{2d+1} + \dots \\ \omega &= \frac{x^a dx}{y}\end{aligned}$$

zu wiederholen. Man stellt fest: ω ist holomorph auf C . Bei ∞ parametrisieren wir $X := C^* = C \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned}x(t) &= t^{-2} + \dots \\ y(t) &= t^{-(2d+1)} + \dots\end{aligned}$$

und finden

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\left(-\frac{2}{t^3} + \dots\right) (t^{-2} + \dots)^a}{\frac{1}{t^{2d+1}} + \dots} dt \\ &= \left(t^{2d+1-3-2a} + \dots\right) dt\end{aligned}$$

d. h. $\nu_\infty(\omega) = (2d - 2 - 2a) \cdot \infty$.

Wir sehen, dass $\omega \in \Omega^1(X)$ genau dann, wenn $0 \leq a \leq d - 1$. Wir finden so d holomorphe Differentiale

$$\frac{dx}{y}, \quad \frac{x dx}{y}, \dots, \frac{x^{d-1} dx}{y}$$

Wir werden später sehen, dass diese Differentiale eine *Basis des Vektorraums* $\Omega^1(X)$ bilden.

11. Vorlesung,
Mittwoch,
30.11.2011
(8-10 Uhr)

(2.6) Holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen Eine nicht-konstante holomorphe Abbildung

$$f: X \longrightarrow Y$$

verhält sich lokal wie $z \mapsto z^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Diese simple Tatsache führt zu einigen erstaunlichen Eigenschaften solcher Abbildungen.

Satz: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, welche $p \in X$ auf $q = f(p) \in Y$ abbildet. Dann existieren lokale Parameter

$$\begin{aligned} \varphi: U &\rightarrow V, & \varphi(p) &= 0, \\ \psi: U' &\rightarrow V', & \psi(q) &= 0 \end{aligned}$$

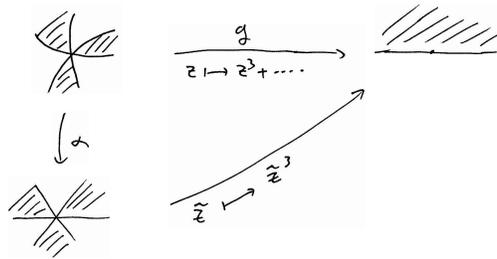
so, dass $f(U) \subset U'$ und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = z \mapsto z^n$.

Beweis: Wähle zuerst den lokalen Parameter $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ für p und $\psi: U' \rightarrow V'$ für q mit $\varphi_1(U_1) \subset U'$. Die Funktion $g: V_1 \rightarrow V'$ definiert als $g = \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ bildet 0 auf 0 ab, wird also durch eine Potenzreihe

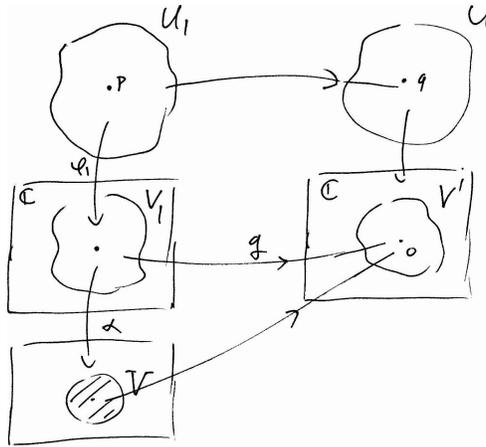
$$g(z) = z^n + a_1 z^{n+1} + \dots = z^n h(z)$$

beschrieben, wobei $n := \nu_0(g)$ und konvergiert auf $V_2 \subset V_1$. Wir können schreiben

$$g(z) = \tilde{z}^n \quad \text{mit} \quad \tilde{z} = z \sqrt[n]{h(z)}.$$



Wir definieren nun V als das Bild von V_2 unter der Abbildung $\alpha: z \mapsto \tilde{z}$, $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$ und $\varphi: U \rightarrow V$ als $\alpha \circ \varphi_1$. Die lokalen Parameter $\varphi: U \rightarrow V$ und $\psi: U' \rightarrow V'$ haben die verlangten Eigenschaften. \square



Definition: Die Zahl n ist unabhängig von den gewählten Karten und heißt *Vielfachheit* von f in p und wird

$$n_p(f) \in \mathbb{N}$$

notiert.

Ist zum Beispiel $f \in \mathcal{O}(X)$ eine holomorphe Funktion auf X , so gilt für die entsprechende Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{C}$

$$n_p(f) = v_p(f - f(p)).$$

Folgerung: Eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist eine *offene Abbildung*, d. h. für alle $U \subset X$ offen gilt $f(U) \subset Y$ offen. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die Abbildung $z \mapsto z^n$ offen ist.

- Eine bijektive holomorphe Abbildung ist automatisch biholomorph.
- Ist X kompakt, so ist auch Y kompakt und f surjektiv. Dies folgt aus $f(X)$ offen, $f(X)$ kompakt, also abgeschlossen. Da Y zusammenhängend, muss $f(X) = Y$ sein.
- Ist X kompakt, so sind alle $f \in \mathcal{O}(X)$ konstant! Wären sie nicht konstant, dann würde aus der Holomorphie der Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ folgen, dass \mathbb{C} kompakt ist.

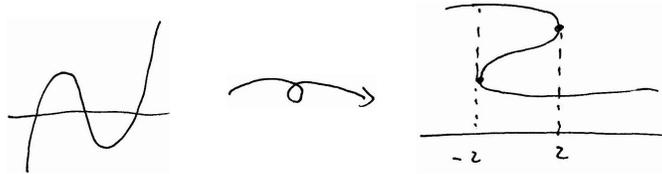
Definition: Ein Punkt $p \in X$ heißt *Verzweigungspunkt*, *Windungspunkt* oder *kritischer Punkt* von $f: X \rightarrow Y$, wenn $n_p(f) \geq 2$.

Die Menge $R := \{p \in X \mid n_p(f) \geq 2\} \subset X$ ist diskret. Die Menge $B := f(R)$ heißt Menge der *kritischen Werte*.

Für $p \in X \setminus R$ ist $n_p(f) = 1$. In einer Umgebung von p ist f biholomorph.

Als Beispiel untersuchen wir die Abbildung

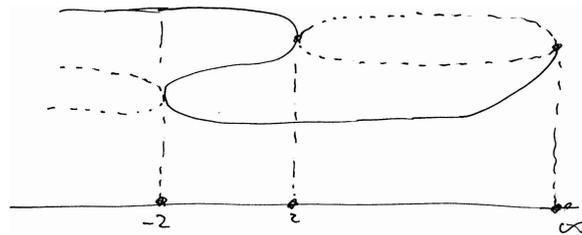
$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1; \quad z \longmapsto w = z^3 - 3z$$



Rechne nach: $f(-1) = 2, f'(-1) = 0; f(1) = -2; f'(1) = 0$. Also: $n_1(f) = n_{-1}(f) = 2$. Was passiert bei $z = \infty$? Es ist dann auch $w = \infty$ und wir müssen die Abbildung in einem lokalen Parameter $s = 1/z$ ausdrücken:

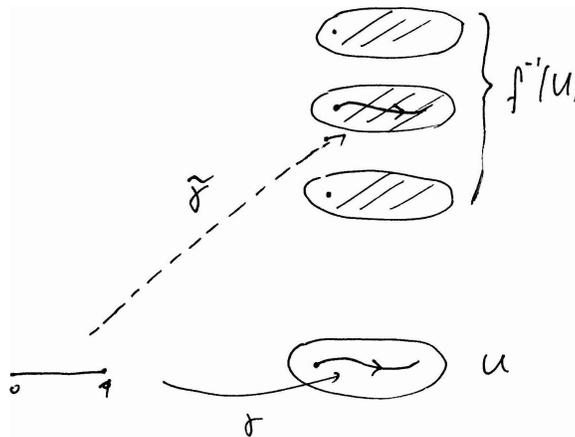
$$t = 1/w = 1/(z^3 - 3z) = \frac{1}{\frac{1}{s^3} - 3\frac{1}{s}} = \frac{s^3}{1 - 3s^2} = s^3 + \dots$$

Also ist $n_\infty(f) = 3$.



(2.7) Eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen $f: X \longrightarrow Y$ heißt *Überlagerung*, wenn für alle $q \in Y$ eine Umgebung U von q existiert so, dass $f^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} V_i$ und $f_i := f|_{V_i} \longrightarrow U$ Homöomorphismen sind.

In der Vorlesung Topologie wird gezeigt, dass eine Überlagerung folgende *Hochhebungseigenschaft* besitzt: Ist $\gamma: [0, 1] \longrightarrow Y$ ein Weg in Y und $p \in f^{-1}(\gamma(0))$, dann existiert genau eine Hochhebung $\tilde{\gamma}: [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\tilde{\gamma}(0) = p$ und $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.



Folgerung: Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, so liefert jeder Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ eine Bijektion

$$P_\gamma: f^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow f^{-1}(\gamma(1))$$

$$p \mapsto \tilde{\gamma}(1).$$

Insbesondere besitzen alle Fasern gleich viele Elemente. Dieses P_γ wird *Paralleltransport entlang γ* genannt und hängt nur von der Homotopieklasse von γ ab.

12. Vorlesung,
Freitag,
2.12.2011 (8-10
Uhr)

Eine Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus. Die Umkehrung ist jedoch völlig falsch: Bei einem lokalen Homöomorphismus können die Blätter „plötzlich aufhören“. Die Fasern $f^{-1}(q)$ haben nicht für alle $q \in Y$ gleich viele Elemente. Wir suchen nun eine zusätzliche Bedingung, die garantiert, dass ein lokaler Homöomorphismus sogar eine Überlagerung ist. Wir betrachten im folgenden nur *topologische Hausdorff-Räume*.

Definition:

- X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt $p \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.
- Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *eigentlich*, wenn Urbilder von kompakten Mengen wieder kompakt sind.

Mannigfaltigkeiten sind offensichtlich lokal kompakt, da abgeschlossene Kugeln im \mathbb{R}^n kompakt sind. In einem lokal kompakten Raum kann man die abgeschlossenen Mengen mit Hilfe von Kompakta definieren:

Es gilt:

$A \subset X$ abgeschlossen $\iff A \cap K$ kompakt für alle $K \subset X$ kompakt.

Ist X kompakt, so ist f automatisch eigentlich, da kompakte Mengen abgeschlossen sind und Urbilder von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen in X sind, also kompakt. Ist $f: X \rightarrow Y$ eigentlich und $Z \subset Y$, so ist auch die Einschränkung $f: f^{-1}Z \rightarrow Z$ eigentlich.

Proposition: Ist $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung zwischen lokal kompakten Räumen X und Y , dann gilt:

1. f ist abgeschlossen.
2. Für alle $q \in Y$ und offene Mengen $V \subset X$ mit $f^{-1}(q) \subset V$ existiert eine offene Menge $U \subset Y$, $q \in U$ mit $f^{-1}(U) \subset V$.

Beweis:

1. Ist $A \subset X$ abgeschlossen und $K \subset Y$ kompakt, dann ist $f(A) \cap K = f(A \cap f^{-1}(K))$ kompakt, da f eigentlich ist. Also ist $f(A)$ abgeschlossen.
2. Ist $V \subset X$ offen, so ist $X \setminus V$ abgeschlossen und somit ist auch $f(X \setminus V)$ abgeschlossen. Ist $f^{-1}(q) \subset V$, so ist $q \notin f(X \setminus V)$ und somit $q \in Y \setminus f(X \setminus V)$. Die Menge $U := f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus V)) \subset V$ hat die gewünschte Eigenschaft. \square

Satz: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung zwischen lokal kompakten Räumen. Dann gilt:

f lokaler Homöomorphismus $\iff f$ ist Überlagerung (und $\#f^{-1}(q) < \infty$)

Beweis: \implies : Wir zeigen zuerst, dass $\#f^{-1}(q) < \infty$. Da $\{q\}$ kompakt und f eigentlich, ist $f^{-1}(q)$ kompakt. Da f lokaler Homöomorphismus ist, ist $f^{-1}(q)$ aber auch diskret. Also ist $f^{-1}(q)$ endlich. Setze $f^{-1}(q) = \{p_1, p_2, \dots, p_d\}$. Wir finden offene Umgebungen W_i von p_i , die holomorph auf offenen Umgebungen U_i von q abgebildet werden. Setze $W = \bigcup_i W_i$. Dies ist eine offene Umgebung von $f^{-1}(q)$ und wir finden durch Anwendung der Proposition eine offene Menge $U \subset \bigcap U_i$ mit $f^{-1}(U) \subset W$. Setze $V_i = W_i \cap f^{-1}(U)$ und verifiziere, dass $f: V_i \rightarrow U$ ein Homomorphismus ist. Die Implikation \Leftarrow ist trivial. \square

Anwendung: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante eigentliche holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Sei

$$\begin{aligned} Y' &= Y \setminus f(R), \\ X' &= f^{-1}(Y'). \end{aligned}$$

Dann ist $f': X' \rightarrow Y'$ ein eigentlicher und lokaler Homöomorphismus, denn für alle $p \in X'$ gilt $n_p(f) = 1$.

Aus oben stehendem Satz folgt, dass $f': X' \rightarrow Y'$ sogar eine Überlagerung ist.

Folgerung

Ist X kompakt und $f: X \rightarrow Y$ holomorph und nicht konstant, dann ist

$$d := \sum_{p \in f^{-1}(q)} n_p(f)$$

unabhängig von q .

Die Zahl d heißt *Grad* oder *Blätterzahl* von f .

Man sagt: $f: X \rightarrow Y$ ist eine *verzweigte Überlagerung*. Die Punkte $p \in X$ mit $n_p(f) \geq 2$ sind die *Verzweigungspunkte*.

Folgerung

Ist X kompakt und $f \in \mathcal{M}(X)$ eine nicht konstante, meromorphe Funktion auf X , dann gilt

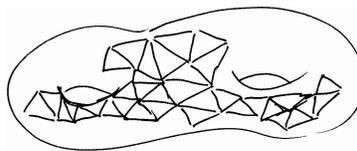
$$\text{Grad}((f)) = 0.$$

Mit Vielfachheit gezählt hat f genau so viele Pol- wie Nullstellen. Dies folgt direkt durch Anwendung auf die entsprechende Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$.

(2.8) Satz von Riemann-Hurwitz

Eine kompakte Riemannsche Fläche wird topologisch durch eine einzige Zahl g , das Geschlecht, charakterisiert. Das Geschlecht berechnet sich oft am einfachsten über die EULER-Charakteristik χ , welche über das Zählen von Ecken, Kanten und Flächen einer Triangulierung bestimmt werden kann

$$E - K + F = \chi(X) = 2 - 2g(X).$$



Ist $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, so gibt der Satz von Riemann-Hurwitz eine Beziehung zwischen $\chi(X)$, $\chi(Y)$ und den Verzweigungszahlen $n_p(f)$.



ADOLF HURWITZ
(1859-1919)

Satz von Riemann-Hurwitz

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Dann gilt:

$$\chi(X) = d \chi(Y) - \sum_{p \in X} (n_p(f) - 1),$$

wobei d den Grad von f bezeichnet.

Beweis: Die Menge $R = \{p \in X \mid n_p(f) \geq 2\}$ der Verzweigungspunkte ist diskret und da X kompakt ist sogar endlich. Setze $B = f(R)$. Wir wählen eine Triangulierung von Y mit $B \subset E(Y)$. Indem wir von den Ecken, Kanten und Flächen der Triangulation die Urbilder in X betrachten, erhalten wir eine Triangulierung von X .

Es gilt:

$$\begin{aligned} F(X) &= d F(Y), \\ K(X) &= d K(Y), \\ E(X) &= d E(Y) - \sum_{p \in R} (n_p(f) - 1). \end{aligned}$$

Also:

$$\chi(X) = d \chi(Y) - \sum (n_p(f) - 1).$$

□

Korollar

$$g(X) = 1 + d(g(Y) - 1) + \frac{1}{2} \sum (n_p(f) - 1)$$

Bemerke, dass immer $\sum_p (n_p(f) - 1) \in 2\mathbb{Z}$.

Wir analysieren einige Beispiele:

1. $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1; z \mapsto z^3 - 3z$

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{P}^1) &= 3 \cdot \chi(\mathbb{P}^1) - ((2-1) + (2-1) + (3-1)) \\ &= 3 \cdot 2 - 4 = 2. \end{aligned}$$

2. Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ Gitter in \mathbb{C} und $E = \mathbb{C}/\Gamma$ die zugehörige Riemannsche Fläche mit $g = 1$. Die WEIERSTRASSsche \wp -funktion ist meromorph auf E und definiert somit eine holomorphe Abbildung $\wp: E \rightarrow \mathbb{P}^1; z \mapsto \wp(z)$.

Da $0 \in E$ ein Pol der Ordnung 2 ist, folgt, dass die Abbildung Grad = 2 hat. Nach dem Satz von Riemann-Hurwitz gilt

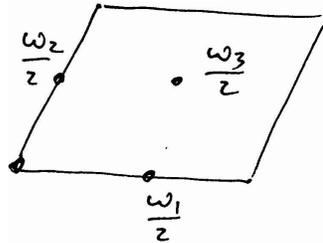
$$\chi(E) = 2\chi(\mathbb{P}^1) - \sum_p (n_p - 1).$$

Da $\chi(E) = 0$ und $\chi(\mathbb{P}^1) = 2$ folgt $\sum_p (n_p - 1) = 4$. Da der Grad aber 2 ist, gilt $n_p \in \{1, 2\}$. Also muss die Abbildung genau 4 Verzweigungspunkte haben. Wo liegen diese?

Allgemein besitzt E genau n^2 sogenannten n -Torsionspunkte

$$E[n] := \{z \in E \mid n \cdot z = 0\} \simeq \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n.$$

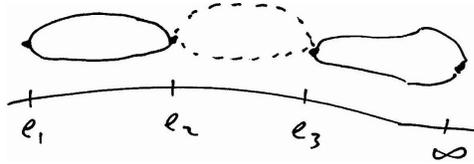
Die 2-Torsionspunkte sind $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} =: \frac{\omega_3}{2}$.



Ist f eine gerade und doppelperiodische, meromorphe Funktion, dann gilt

$$\begin{aligned} f\left(z + \frac{\omega_i}{2}\right) &= f\left(-\left(z + \frac{\omega_i}{2}\right)\right) \\ &= f\left(-z - \frac{\omega_i}{2}\right) = f\left(-z + \frac{\omega_i}{2}\right), \end{aligned}$$

d. h.: f ist auch symmetrisch bezüglich des Punktes $\frac{\omega_i}{2}$. In der Laurent-Entwicklung kommen also nur gerade Potenzen vor. Wir folgern $n_{\frac{\omega_i}{2}}(\wp) = 2$, das heißt, die Verzweigungspunkte sind genau die 2-Torsionspunkte.



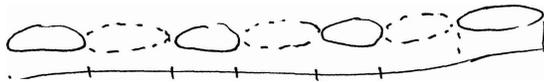
Die kritische Werte $e_i := \wp\left(\frac{\omega_i}{2}\right)$ hängen direkt mit g_2 und g_3 zusammen durch:

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \\ &= 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \end{aligned}$$

3. Eine Riemannsche Fläche X heißt *hyperelliptisch*, wenn es $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ gibt vom Grad 2. Für alle $p \in X$ ist dann $n_p(f) \in \{1, 2\}$. Aus Riemann-Hurwitz finden wir

$$2 - 2g = 2 \cdot 2 - \sum_{p \in R} (n_p(f) - 1).$$

Hieraus folgt, dass es $2 + 2g$ Verzweigungspunkte gibt.



13. Vorlesung,
Mittwoch,
7.12.2011 (8-10
Uhr)

(2.9) Die Monodromiegruppe einer verzweigten Überlagerung Wir haben gesehen, wie jede nicht-konstante, holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen kompakten Riemannschen Flächen zu einer Darstellung der Fläche X als verzweigte Überlagerung von Y führt. Wir wollen nun kombinatorisch beschreiben, wie X durch Verklebung von $d = \text{Grad}(f)$ über Y ausgestreckte Blätter entsteht. Eine wichtige Invariante dabei ist die *Monodromiegruppe der Überlagerung*, die folgendermaßen definiert ist:

Wir wählen zuerst einen *Basispunkt* $a \in Y \setminus B$. Das Urbild $f^{-1}(a)$ besteht dann aus genau $d = \text{Grad}(f)$ verschiedenen Punkten von X .

Für einen geschlossenen Weg

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow Y \setminus B$$

mit $\gamma(0) = \gamma(1) = a$ liefert der Paralleltransport längs γ eine Bijektion

$$P_\gamma: f^{-1}(a) \rightarrow f^{-1}(a).$$

Dies hängt nur von der Homotopieklasse $[\gamma] \in \pi_1(Y \setminus B, a)$ ab und erfüllt (mit der richtigen Definition von $*$...)

$$P_{\gamma*\delta} = P_\gamma \circ P_\delta.$$

Wir erhalten somit einen Gruppenhomomorphismus

$$P: \pi_1(Y \setminus B, a) \longrightarrow \text{Aut } f^{-1}(a),$$

wobei $\text{Aut } f^{-1}(a)$ die Gruppe der Bijektionen von $f^{-1}(a)$ auf sich bezeichnet.

Der Gruppenhomomorphismus sagt uns genau, wie bei einem Umlauf in $Y \setminus B$ die Urbilder $f^{-1}(a)$ vertauscht werden.

Wenn wir eine Nummerierung der Blätter bei a vornehmen, können wir schreiben

$$f^{-1}(a) = \{b_1, b_2, \dots, b_d\}.$$

Mit \mathfrak{S}_d geben wir die Permutationsgruppe auf $1, 2, \dots, d$ an. Durch die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut } f^{-1}(a) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_d \\ \varphi & \longmapsto & \sigma \end{array}$$

festgelegt durch $\varphi(b_i) = b_{\sigma(i)}$, wird ein *Gruppen-Isomorphismus* zwischen $\text{Aut}(f^{-1}(a))$ und \mathfrak{S}_d festgelegt. Speziell wird so jedem P_γ eine Permutation $\sigma_\gamma \in \mathfrak{S}_d$ zugeordnet:

$$P_\gamma(b_i) = b_{\sigma_\gamma(i)}$$

Definition: Den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}: \pi_1(Y \setminus B, a) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_d \\ \gamma & \longmapsto & \sigma_\gamma \end{array}$$

nennen wir *Monodromiedarstellung* von f der Überlagerung und Nummerierung. Das Bild von \mathfrak{S} wird die *Monodromiegruppe* $\text{Mon}(f)$ von $f: X \rightarrow Y$ genannt:

$$\text{Mon}(f) = \text{Bild}(\mathfrak{S}) < \mathfrak{S}_d.$$

Überlege, dass eine andere Nummerierung von $f^{-1}(a)$ zu einer Konjugation von $\text{Mon}(f)$ führt. Die Monodromiegruppe ist keine vollständige Invariante. Wir werden jedoch sehen, dass wir die Fläche X eindeutig aus Y und der Monodromiedarstellung rekonstruieren können.

Um die Monodromiedarstellung *explizit* zu beschreiben, ist es vorteilhaft, konkrete Erzeuger für die Gruppe $\pi_1(Y \setminus B, a)$ zu wählen. Wir führen dies aber nur für den wichtigen Fall $Y = \mathbb{P}^1$ aus. Jede nicht-konstante, meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche führt zu einer solchen Situation. Die Beschreibung verzweigte Überlagerungen mit Hilfe der Monodromie geht auf Victor Puiseux zurück.



VICTOR PUISEUX
(1820-1883)

Es sei also $Y = \mathbb{P}^1$ und $B = \{a_0, a_1, \dots, a_\mu\}$. Wir können ohne Einschränkung voraussetzen, dass $a_0 = \infty$, sodass

$$Y \setminus B = \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_\mu\}.$$

Aus der Vorlesung Topologie sollte bekannt sein, dass die Gruppe

$$\pi_1(Y \setminus B, a) = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_\mu\}, a)$$

eine *freie Gruppe auf μ Erzeuger* ist: Schöne Erzeugersysteme erhalten wir aus Systemen von Bögen.

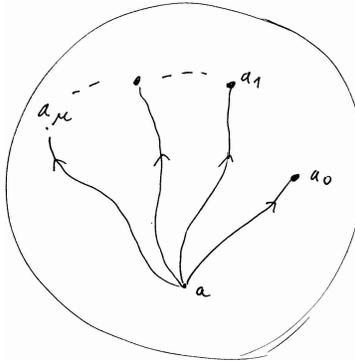
Definition:

Ein *Bogensystem* $(\beta_0, \dots, \beta_\mu)$ besteht aus Bögen

$$\beta_i: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad i = 0, \dots, \mu$$

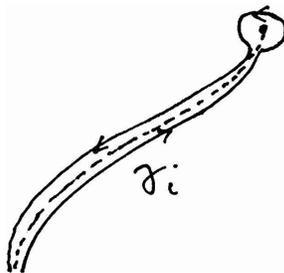
mit

1. Die Abbildung $\beta_i: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ist C^∞ und injektiv.
2. $\beta_i(0) = a$, $\beta_i(1) = a_i$.
3. $\beta_i([0, 1]) \cap \beta_j([0, 1]) = \{a\}$ für $i \neq j$.
4. Die Argumente der Tangenten von $\beta_i([0, 1])$ bei a sind aufsteigend nach i .)



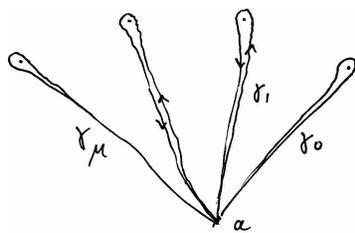
Ein Bogensystem bestimmt ein Wegesystem $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\mu)$ mit Basispunkt a . Hierbei ist γ_i ein geschlossener Weg von a nach a , welcher folgendermaßen entsteht:

Laufe entlang β_i bis kurz vor a_i , mache dann gegen den Uhrzeigersinn einen kleinen Umlauf um a_i und laufe anschließend mit β_i^{-1} zurück nach a :



Für ein solches Wegesystem gilt offenbar

1. $\gamma_0 * \gamma_1 * \dots * \gamma_\mu \sim [a]$
2. Die Gruppe $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus B, a)$ wird von $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\mu$ frei erzeugt.



Definition: Ein *Tupel* in \mathfrak{S}_d ist ein geordnetes $\mu + 1$ -Tupel

$$(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu)$$

mit $\sigma_i \in \mathfrak{S}_d$ und $\sigma_0 \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_\mu = 1$.

Jeder Tupel bestimmt einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho: \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus B, a) \longrightarrow \mathfrak{S}_d, \gamma_i \mapsto \sigma_i$$

Der *Monodromie-Tupel* von $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, Wegesystem $(\gamma_0, \dots, \gamma_\mu)$ mit Basispunkt a und Nummerierung $f^{-1}(a) = \{b_1, b_2, \dots, b_\mu\}$ ist das Tupel

$$(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu),$$

wobei

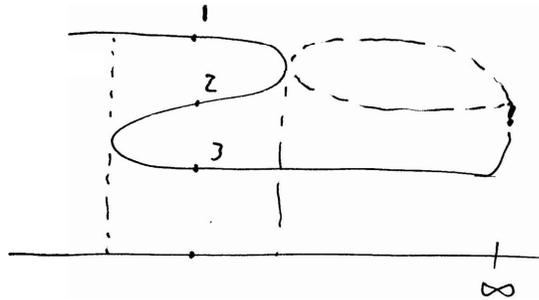
$$\sigma_i := \sigma_{\gamma_i} \in \mathfrak{S}_d.$$

Bemerke, dass der Monodromie-Tupel $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu)$ die Monodromiedarstellung vollständig beschreibt. Die Monodromiegruppe ist die Gruppe erzeugt von den $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu$:

$$\text{Mon}(f) = \langle \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\mu \rangle.$$

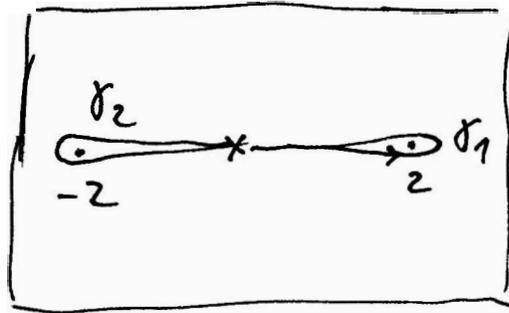
Beispiele:

1. Betrachte $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, gegeben durch $z \mapsto z^3 - 3z$.



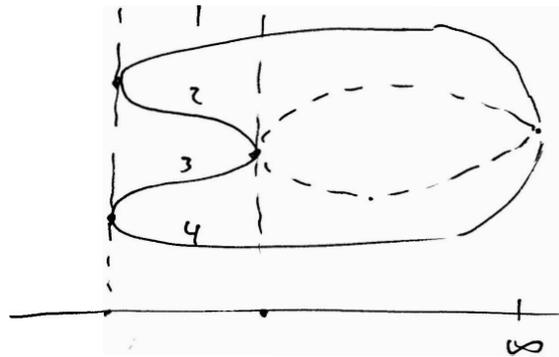
$$B = \{a_0 = \infty, a_1 = 2, a_2 = -2\}$$

Wir wählen $a = 0$ als Basispunkt.



Wir sehen $\sigma_1 = (12)$, $\sigma_2 = (23)$. Aus der Relation $\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = 1$ folgt $\sigma_0 = (132)$. Die Monodromiegruppe $Mon(f) = \mathfrak{S}_3$.

2. Betrachte $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, gegeben durch $z \mapsto z^4 - z^2$

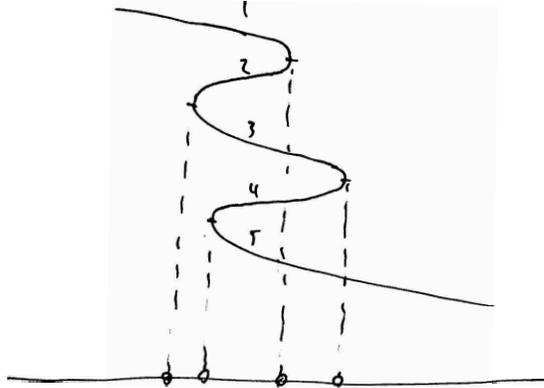


Analog finden wir

$$\sigma_1 = (23), \quad \sigma_2 = (12)(34),$$

so dass $Mon(f) = \langle (23), (12)(34) \rangle < \mathfrak{S}_4$.

3. Für ein $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ definiert durch ein Polynom von Grad 5 wie unten



lesen wir ab:

$$\sigma_1 = (34), \sigma_2 = (12), \sigma_3 = (4,5), \sigma_4 = (23)$$

Die Monodromiegruppe $Mon(f) = \mathfrak{S}_5$

Überlege selber die Richtigkeit von:

Proposition:

1. Die Monodromie-Gruppe G operiert *transitiv* auf $\{1, 2, \dots, d\}$.
2. Ist $f^{-1}(a_i) = \{p_1, \dots, p_n\}$, so hat die Permutation σ_i den Zykeltyp

$$(n_1, n_2, \dots, n_n),$$

wobei $n_i := n_{p_i}(f)$.

14. Vorlesung,
Freitag,
9.12.2011 (8-10
Uhr)

Unser Ziel ist es jetzt, folgenden grundlegenden Satz zu beweisen.

Riemannsche Existenzsatz

Gegeben seien eine kompakte Riemannsche Fläche Y , $B := \{a_0, a_1, \dots, a_\mu\} \subset Y$ eine endliche Menge, $a \in Y' := Y \setminus B$ ein Basispunkt und $\rho: \pi_1(Y \setminus B, a) \rightarrow \mathfrak{S}_d$ ein Gruppenhomomorphismus.

Dann existiert genau eine kompakte Riemannsche Fläche X , eine nicht-konstante Abbildung $f: X \rightarrow Y$ und eine Nummerierung von $f^{-1}(a)$, so dass

1. $B = f(R)$, wobei $R = \{p \in X \mid n_p(f) \geq 2\}$
2. $\text{Grad}(f) = d$

3. Die Monodromie-Darstellung von $f: X \rightarrow Y$ ist ρ .

Schritt 1: Konstruktion einer unverzweigten Überlagerung $X' \rightarrow Y' := Y \setminus B$ mit Monodromie-Darstellung $= \rho$.

Wir geben zwei Konstruktionen für X' .

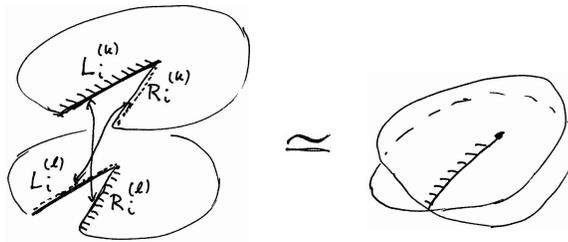
A: Bastelanleitung Wir behandeln nur den Fall $Y = \mathbb{P}^1$, wo bereits alle Aspekte der allgemeinen Situation auftreten.

- Wir wählen dazu ein Wegesystem $(\gamma_0, \dots, \gamma_\mu)$ wie oben. Der Homomorphismus ρ liefert uns einen Tupel $(\sigma_0, \dots, \sigma_\mu)$, wobei $\sigma_i := \rho(\gamma_i)$.
- Starte mit d Kopien $\mathbb{P}^{1(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, d$) von \mathbb{P}^1
- Schneide die gewählten Bögen

$$\beta = \bigcup_{i=0}^{\mu} \beta_i([0, 1])$$

aus $\mathbb{P}^{1(k)}$ heraus und setze $U^{(k)} = \mathbb{P}^1 \setminus \beta$.

- Füge „linke und rechte Ufer“ $L_i^{(n)}$ und $R_i^{(n)}$ an $U^{(n)}$ und setze $X^{(k)} = U^{(k)} \cup_{i=0}^{\mu} L_i^{(k)} \cup_{i=0}^{\mu} R_i^{(k)}$



- Verklebe die Ufer miteinander gemäß dem Tupel $(\sigma_0, \dots, \sigma_\mu)$

$$\sigma_i(k) = l \iff \text{verklebe } R_i^{(k)} \text{ entlang } L_i^{(l)}$$

- Setze $X' = \prod_{k=1}^d X^{(k)} / \sim$

Dies ist eine topologische Fläche und $X' \rightarrow Y'$ ist eine Überlagerung, welche ρ als Monodromie hat.

B: Abstrakte Konstruktion

Sei $\rho: \pi_1(Y \setminus B, a) \rightarrow \mathfrak{S}_d$ ein Gruppenhomomorphismus. Das Bild $G := \text{Bild}(\rho)$ ist die zugehörige Monodromiegruppe. Wir betrachten nun den Kern $H := \ker(\rho)$. Sei weiter $\tilde{Y}' \rightarrow Y'$ die *universelle Überlagerung* von Y' . Die Gruppe H operiert auf \tilde{Y}' durch Decktransformationen. Wir setzen $X' := \tilde{Y}'/H$. Aus der Vorlesung Topologie folgt:

- 1) $X' \rightarrow Y'$ ist eine Überlagerung
- 2) $\pi_1(X') \rightarrow \pi_1(Y')$ hat genau H als Bild.
- 3) $X' \rightarrow Y'$ hat ρ als Monodromie-Darstellung.

Schritt 2: (vgl. Forster, Theorem 4.6, S. 22) Sei Y eine beliebige Riemannsche Fläche und X ein zusammenhängender, Hausdorffscher Raum, $f: X \rightarrow Y$ ein lokaler Homöomorphismus. Dann gibt es auf X genau eine Struktur als Riemannsche Fläche, für die f holomorph ist.

Beweis: Jeder Punkt $p \in X$ besitzt eine Umgebung U , welche durch f homöomorph auf eine Umgebung V von $f(p)$ abgebildet wird. Durch eventuelle Verkleinerung von U und V können wir voraussetzen, dass es eine Karte $\varphi: V \rightarrow W \subset \mathbb{C}$ aus dem Atlas von Y gibt. Wir erhalten auf diese Weise einen Atlas für X , welcher die Karten $\varphi \circ f|_U: U \rightarrow W$ enthält. Die holomorphe Verträglichkeit ist nicht schwer einzusehen. Durch diesen Atlas ist die Abbildung $f: X \rightarrow Y$ per Definitionem lokal biholomorph geworden. Die so entstandene komplexe Struktur auf X ist eindeutig. Ist nämlich \mathcal{A}' ein weiterer Atlas, welcher $f: X \rightarrow Y$ holomorph macht, so erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{A}) & \xrightarrow{id} & (X, \mathcal{A}') \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & & Y \end{array}$$

Da f und f' beide lokal biholomorph sind, folgt dass Id biholomorph ist. \square

Wir können dies auf unsere topologische Überlagerung $f': X' \rightarrow Y'$ aus **Schritt 1** anwenden und erhalten somit eine komplexe Struktur auf X' .

Wir wollen nun die Fläche X' zu einer *kompakten* Riemannschen Fläche X und f' zu einer *holomorphen Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen* erweitern.

$$\begin{array}{ccc}
 X' \hookrightarrow & \dots & X \\
 f' \downarrow & & \downarrow \\
 Y' \hookrightarrow & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

Auch diese Konstruktion folgt aus ganz allgemeinen Überlegungen.

Wir betrachten zur Orientierung eine *Modell-Situation*:

Setze

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad \mathbb{E}^* = \mathbb{E} \setminus \{0\}.$$

Die Überlagerungsabbildung

$$p_n^*: \mathbb{E}^* \longrightarrow \mathbb{E}^*; z \longmapsto z^n$$

besitzt eine offensichtliche Erweiterung

$$p_n: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}; z \longmapsto z^n$$

und wir erhalten das offensichtliche Diagramm $M(n)$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{E}^* \hookrightarrow & \mathbb{E} & \longleftarrow & \{0\} & \\
 p_n^* \downarrow & & \downarrow p_n & & \downarrow \\
 \mathbb{E}^* \hookrightarrow & \mathbb{E} & \longleftarrow & \{0\} &
 \end{array}$$

Ausschlaggebend ist folgendes Lemma, das als Übungsaufgabe empfohlen wird:

Lemma: Jede Überlagerung $W^* \xrightarrow{f} \mathbb{E}^*$ einer Riemannschen Fläche ist isomorph zu $p_n^*: \mathbb{E}^* \longrightarrow \mathbb{E}^*$, wobei $n = \text{Grad}(f)$.

Hierbei bedeutet die Isomorphie, dass es ein $\varphi: W^* \longrightarrow \mathbb{E}^*$ existiert, so dass $f = p_n^* \circ \varphi$.

Dies ist die entscheidende Idee für **Schritt 3**.

Satz über das Stopfen der Löcher

Sei $f': X' \longrightarrow Y'$ eine (unverzweigte) Überlagerung von Riemannschen Flächen, $Y' \hookrightarrow Y$, wobei Y eine kompakte Riemannsche Fläche ist und $Y \setminus Y' = B = \{a_0, \dots, a_\mu\}$.

Dann existiert genau eine Riemannsche Fläche X und eine holomorphe Abbildung $f: X \longrightarrow Y$, welche $f': X' \longrightarrow Y'$ fortsetzt.

$$\begin{array}{ccc}
X' & \hookrightarrow & X \\
f' \downarrow & & \downarrow f \\
Y' & \hookrightarrow & Y
\end{array}$$

(vgl. Forster, Theorem 8.4, S. 51)

Beweis: Wähle für alle Punkte $a_i \in B$ eine Karte $\phi_i: U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{E}$, $a_i \mapsto 0$. Setze

$$\begin{aligned}
U &:= \coprod_{i=0}^{\mu} U_i \\
U^* &:= U \cap Y' = \coprod_{i=0}^{\mu} U_i^*.
\end{aligned}$$

Durch ϕ_i erhalten wir Biholomorphismen $U_i^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{E}^*$. Setze weiter

$$V^* := (f')^{-1}(U^*) = \coprod_{i=0}^{\mu} f'^{-1}(U_i^*) = \coprod_{i=0}^{\mu} \coprod_{j \in I_i} V_{ij}^*$$

wobei V_{ij}^* , $j \in I_i$, die Zusammenhangskomponenten von V^* sind. Die Einschränkung von f' liefert Überlagerungen

$$f'_{ij}: V_{ij}^* \longrightarrow U_i^*$$

Nach dem oben stehenden Lemma sind diese isomorph zu Standard-Überlagerungen $p_n^*: \mathbb{E}^* \longrightarrow \mathbb{E}^*$ für gewisse $n = n_{ij}$: Wir erhalten so $\varphi_{ij}^*: V_{ij}^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{E}^*$ und ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
V_{ij}^* & \xleftarrow{\varphi_{ij}^*} & \mathbb{E}^* \\
f'_{ij} \downarrow & \exists & \downarrow p_{n_{ij}}^* \\
U_i^* & \xleftarrow[\phi_i^*]{\cong} & \mathbb{E}^*
\end{array}$$

Wähle nun *abstrakte Punkte* P_{ij} ($i = 0, \dots, \mu, j \in I_i$) und setze

$$V_{ij} = V_{ij}^* \cup \{P_{ij}\},$$

Wir erweitern φ_{ij}^* zu $\varphi_{ij}: V_{ij} \xrightarrow{\cong} \mathbb{E}$ indem wir $\varphi_{ij}(P_{ij}) = 0$ setzen.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 V_{ij}^* & \hookrightarrow & V_{ij} & \longleftarrow & \{P_{ij}\} \\
 f'_{ij} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U_i^* & \hookrightarrow & U_i & \longleftarrow & \{a_i\}
 \end{array}$$

ist nun isomorph zum Diagramm $M(n_{ij})$.

Wir haben eine Inklusion $V^* \xrightarrow{\beta} V := \coprod_{i=0}^{\mu} \coprod_{j \in I_i} V_{ij}$ und erhalten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 V^* & \xrightarrow{\beta} & V \\
 f^* \downarrow & & \downarrow g \\
 U^* & \hookrightarrow & U
 \end{array}$$

wobei f^* und g die offensichtliche Abbildungen sind. Wir haben außerdem eine Inklusion $V^* \xrightarrow{\alpha} X'$. Definiere X durch folgendes „Push-out“ Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 V^* & \xrightarrow{\beta} & V \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{\beta} & X
 \end{array}$$

Das heißt: X entsteht durch Verklebung von X' und V mit Hilfe von α und β :

$$X = X' \amalg V / \sim,$$

wobei \sim die Äquivalenzrelation ist, welche $\alpha(P)$ mit $\beta(P)$, $P \in V^*$, identifiziert, und versehen mit der Quotiententopologie. X ist eine Riemannsche Fläche; die $\phi_{ij}: V_{ij} \rightarrow \mathbb{E}$ sind Karten um p_{ij} . Wir erhalten so ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \hookrightarrow & X & \longleftarrow & X' \\
 g \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f' \\
 U & \hookrightarrow & Y & \longleftarrow & Y'
 \end{array}$$

Die Existenz einer stetigen Abbildung f folgt aus der *universellen Eigenschaft* der Quotiententopologie. Die so konstruierte Fläche X mit Abbildung $f: X \rightarrow Y$ liefert nun die gefragte Erweiterung von $f': X' \rightarrow Y'$. Einige Sachen gibt es zu verifizieren. Zum Beispiel ist f holomorph, weil f' und g es sind. \square

Die Kombination von Schritt 1, Schritt 2 und Schritt 3 führt nun direkt zum angekündigten *Existenztheorem für Riemannsche Flächen*.

Wir können den Satz über das Stopfen der Löcher, auch benutzen, um eine algebraische Kurve definiert durch $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ zu einer kompakten Riemannsche Fläche zu erweitern.

Sei $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom, $C = V(F) \in \mathbb{C}^2$ die zu F gehörige algebraische Kurve. Schreibe

$$\begin{aligned} F &= a_0(X)Y^d + \cdots + a_d(X) \quad a_i \in \mathbb{C}[X] \\ &= a_0(X)f(X, Y) \end{aligned}$$

mit $f(X, Y) = Y^d + b_1(X)Y^{d-1} + \cdots + b_d(X)$, $b_i(X) = \frac{a_i(X)}{a_0(X)} \in \mathbb{C}(X)$.

Setze $U := \{x \in \mathbb{C} \mid a_0(x) \neq 0, \Delta f(x) \neq 0\}$, wobei $\Delta = \text{Res}_y(f, \partial_y f) \in \mathbb{C}(X)$ die Diskriminante bezeichnet. Sei

$$C^0 := \{(X, Y) \in U \times \mathbb{C} \mid f(X, Y) = 0\}.$$

Dann ist $C^0 \rightarrow U; (X, Y) \mapsto X$ eine unverzweigte Überlagerung vom Grad d .

Aus der Satz über das Stopfen von Löcher erhalten ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} C^0 & \xrightarrow{\quad} & X = \overline{C_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Wir nennen X die kompakte Riemannsche Fläche zu C .

(2.10) Überlagerung und Körpererweiterung Betrachte eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen kompakten Riemannschen Flächen X und Y .

Ist $\varphi \in \mathcal{M}(Y)$ meromorph, so entspricht φ einer holomorphen Abbildung $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$. Durch Komposition mit f erhalten wir $\varphi \circ f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, d. h. einer meromorphen Funktion $\varphi \circ f \in \mathcal{M}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(Y) &\longrightarrow \mathcal{M}(X) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass $\mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$, also erhalten wir eine Körpererweiterung.

Satz

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung vom Grad d und $K \subset L$ die entsprechende Körpererweiterung, wobei $K = \mathcal{M}(Y)$, $L = \mathcal{M}(X)$. Dann gilt:

1. Für alle $g \in L$ ist:

$$[K(g) : K] \leq d.$$

2. Gilt die Gleichheit $[K(g) : K] = d$, so ist auch

$$L = K(g).$$

3. Nimmt g d verschiedene Werte an auf der Faser $f^{-1}(a)$ für ein $a \in Y$, so gilt die Gleichheit $[K(g) : K] = d$.

Beweis: 1) Setze $\Sigma := \{p \in X \mid n_p(f) \geq 2\} \cup \text{Pole}(g)$ und $Y' := Y \setminus f(\Sigma)$, $X' = X \setminus f^{-1}(\Sigma)$. Die Abbildung $f' : X' \rightarrow Y'$ ist unverzweigt und für $a \in Y'$ erhalten wir eine offene Umgebung $U \subset Y'$ s. d. $f^{-1}(U) = \coprod_{i=1}^d V_i$ und Biholomorphismen $\varphi_i : U \xrightarrow{\sim} V_i$. Setze $g_i := g \circ \varphi_i$ und betrachte das Polynom

$$F(T) = \prod_{i=1}^d (T - g_i) = T^d + b_1 T^{d-1} + \dots + b_d.$$

Es folgt $b_i \in \mathcal{O}(U)$ und $F(g) = 0$. Die b_i s verkleben zu globalen meromorphen Funktionen $B_i \in \mathcal{M}(Y)$ und somit erfüllt g die Gleichung $F(g) = 0$, wobei $F \in \mathcal{M}(Y)[T]$. Es folgt

$$[K(g) : K] \leq d.$$

2) Angenommen, es ist $[K(g) : K] = d$. Sei $k \in L = \mathcal{M}(Y)$ ein weiteres Element. Dann gilt

$$K \subseteq K(g) \subseteq K(k, g) = K(\rho),$$

wobei ρ primitives Element der Erweiterung $K \subset K(k, g)$ ist. Da

$$d \geq [K(\rho) : K] = [K(k, g) : K(g)][K(g) : K]$$

folgt:

$$[K(k, g) : K(g)] = 1$$

Also ist $K(k, g) = K(g)$, d. h. $k \in K(g)$. Da $k \in L$ beliebig war, folgt $L = K(g)$.

3) Ist $g_i(a) \neq g_j(a)$, $i \neq j$, dann kann g keine Gleichung vom Grad $< d$ erfüllen. \square

Wir können dies anwenden auf eine algebraische Kurve

$$f(x, y) = 0 \quad f \in \mathbb{C}(X)[Y],$$

definiert durch ein irreduzible Polynom f über $\mathbb{C}(X)$.

Sei X die kompakte Riemannsche Fläche zu f wie aus dem folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Es ist klar, dass $x, y \in \mathcal{M}(X) \supset \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(x)$. Die Funktion y nimmt auf Fasern von f d verschiedene Werte an. Also ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(X) &= \mathbb{C}(x)(y) = \mathbb{C}(x, y) / (f(x, y)) \\ &= \mathbb{C}(x)[y] / f(x, y). \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{M}(X)$ eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{C}(x)$ vom Grad d !

In der Vorlesung *Körper, Ringe, Moduln* lernt man, wie man zu $f \in K[Y]$ vom Grad d eine *Galois Gruppe* $\text{Gal}(f)$ assoziiert, welche den Auflösungsprozess der Gleichung

$$f = 0$$

beschreibt. Die Gruppe $\text{Gal}(f)$ vertauscht die Wurzeln von f in einen Zerfällungskörper und ist somit Untergruppe von \mathfrak{S}_d .

In dieser Vorlesung haben wir jeder verzweigten Überlagerung $f: X \rightarrow Y$ eine Monodromiegruppe $\text{Mon}(f) < \mathfrak{S}_d$ zugeordnet, welche die Vertauschung der Blätter beschreibt.

Satz von HERMITE

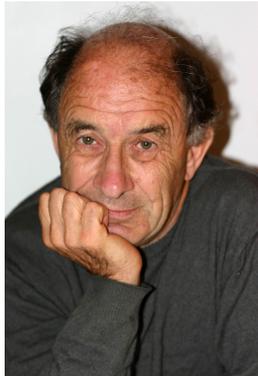
Ist $f \in \mathbb{C}(X)[Y]$ irreduzibel, dann gilt:

$$\text{Mon}(f) \simeq \text{Gal}(f)$$



CHARLES HERMITE
(1822-1901)

Der Mathematiker V. I. Arnold hat angegeben, wie dies zu ein *topologischer Beweis* vom Satz von ABEL-RUFFINI über die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung von Grad ≥ 5 führt.

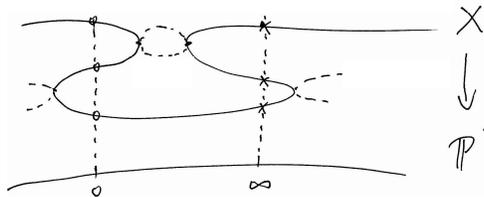


VLADIMIR I. ARNOLD
(1937-2010)

§3. Analysis auf Riemannschen Flächen

(3.1) Eine meromorphe Funktion f auf einer kompakten Riemannschen Fläche hat, mit Vielfachheit gezählt, genau so viele Null- wie Polstellen:

$$\text{Grad}((f)) = 0$$



Können wir ansonsten die Pol- und Nullstellen beliebig vorschreiben?

Für $X = \mathbb{P}^1$ ist die Antwort offensichtlich: ja!

Ist $D = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k - P_1 - P_2 - \dots - P_l + (l - k)\infty$ ein Divisor vom Grad 0 mit $(f) = D$; wir können

$$f(x) = \frac{\prod_{i=1}^k (x - Q_i)}{\prod_{i=1}^l (x - P_i)}$$

nehmen. erinnert sei hier noch an die Tatsache, dass der Divisor (f) auf einer kompakten Riemannschen Fläche die Funktion f bis auf eine multiplikative Konstante festlegt.

Für alle kompakten Riemannschen Flächen X mit $g(X) \geq 1$ lautet die Antwort auf die obige Frage: nein.

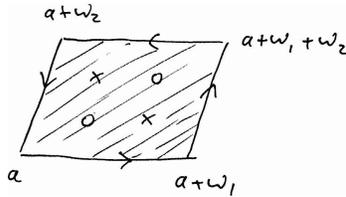
Wir untersuchen dies für Tori $X = \mathbb{C}/\Gamma$, wobei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter ist. Eine meromorphe Funktion auf X ist dasselbe wie eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} , die doppelt periodisch bezüglich Γ ist. Pole und Nullstellen einer solchen Γ -doppelt periodischen Funktion können nicht beliebig gewählt werden.

Proposition: Es sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Pol- und Nullstellen in einem Periodenparallelogramm \mathcal{P}_a (so gewählt, dass $\alpha_i \notin \partial\mathcal{P}_a$), und es sei $m_i = v_{\alpha_i}(f)$ die Vielfachheit. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^r m_i \cdot \alpha_i = 0 \pmod{\Gamma}$$

(Hier steht eine Summe in \mathbb{C} , nicht etwa in $\text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma)$.)

Beweis:



Aus dem Residuensatz folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum \alpha_i \operatorname{Res}_{\alpha_i} \left(\frac{f'}{f} \right) = \sum \alpha_i \cdot m_i.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{a+\omega_2}^{a+\omega_1+\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= -\omega_2 \int_a^{a+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= -\omega_2 \log f \Big|_a^{a+\omega_1} \in 2\pi i \mathbb{Z} \cdot \omega_2, \end{aligned}$$

und analog

$$\int_{a+\omega_1}^{a+\omega_1+\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_a^{a+\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\pi i \mathbb{Z} \cdot \omega_2.$$

Also $\sum \alpha_i m_i \in \Gamma$ □

Wir versuchen nun analog zu

$$D = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_d - P_1 - P_2 - \dots - P_d$$

ein f mit $(f) = D$ zu konstruieren.

Da die Riemannsche Fläche \mathbb{C}/Γ isomorph zu $\mathbb{C}/\lambda\Gamma$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$) ist, können wir das Gitter immer als

$$\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \tau$$

wählen, wobei $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

Definition: Für $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{H}$ setzen wir

$$\theta(z, \tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z}$$

Die Summe konvergiert absolut und uniform auf Kompakta in $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ und definiert somit eine holomorphe Funktion (in z und τ), welche *Theta-Funktion* genannt wird.

Eigenschaften der θ -Funktion:

1. $\theta(z + 1, \tau) = \theta(z, \tau)$
2. $\theta(z + \tau, \tau) = e^{-\pi i \tau - 2\pi i z} \theta(z, \tau)$
3. $\theta(z + a\tau + b, \tau) = e^{-\pi i a^2 \tau - 2\pi i a z} \theta(z, \tau) \quad (a, b \in \mathbb{Z})$.

Satz: $\theta(z, \tau)$ hat genau eine einfache Nullstelle im Periodenparallelogramm vom Gitter $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$.

Beweis: Das Pol- und Nullstellen zählende Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{P}} f'/f dz$ zählt die Nullstelle von $f(z) := \theta(z, \tau)$ mit Vielfachheit (θ hat keine Pole).

Es ist

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+\tau) &= c \cdot e^{-2\pi i z} \cdot f(z) \implies \\ \frac{f'}{f}(z+\tau) &= \frac{f'}{f}(z); \quad \frac{f'}{f}(z+\tau) = \frac{f'}{f} - 2\pi i \\ \# \text{Nullstellen} &= \frac{1}{2\pi i} \{ \downarrow - \uparrow + \longrightarrow - \longleftarrow \} = 1. \end{aligned}$$

□

Die Frage ist: *Wo liegt diese Nullstelle?*

Man definiert die θ -Funktion mit Charakteristiken a, b als

$$\theta_{a,b}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (a+n)^2 \cdot \tau + 2\pi i (n+a)(z+b)}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies bis auf einen Faktor eine um $a\tau + b$ verschobene θ -Funktion ist, d.h.

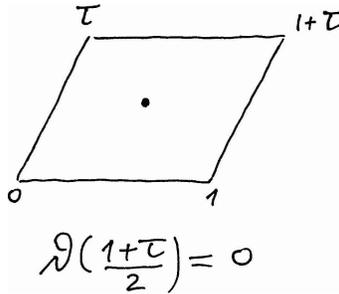
$$\theta_{a,b}(z, \tau) = e^{\pi i a^2 \tau + 2\pi i a(z+b)} \theta(z + a\tau + b, \tau).$$

Speziell für $a = b = \frac{1}{2}$ findet man

$$\begin{aligned} \theta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-z, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n + \frac{1}{2})^2 \cdot \tau + 2\pi i (n + \frac{1}{2})(-z + \frac{1}{2})} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (-\frac{1}{2} - m)^2 + 2\pi i (-m - \frac{1}{2})(-z + \frac{1}{2})} \quad (m = -1 - n) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (m + \frac{1}{2})^2 + 2\pi i (m + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2}) - 2\pi i (m + \frac{1}{2})} \\ &= -\theta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \end{aligned}$$

Also: $\theta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, \tau) = 0$.

Korollar: $\theta(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau, \tau) = 0$



Wir wählen Punkte Q_1, Q_2, \dots, Q_d und P_1, P_2, \dots, P_d und setzen

$$f(z) := \frac{\prod_{i=1}^d \theta\left(z - Q_i + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau}_{c_i}\right)}{\prod \theta\left(z - P_i + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau}_{d_i}\right)}$$

Man verifiziert schnell, dass:

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+\tau) &= e^{2\pi i(\sum c_i - \sum d_i)} f(z) \end{aligned}$$

gilt. Ist also $\sum Q_i = \sum P_i$, so folgt

$$f(z+\tau) = f(z),$$

d. h. wir haben eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ mit $(f) = D$ gefunden.

Bemerke, dass $\omega = dz$ eine holomorphe Differentialform auf \mathbb{C}/Γ ist und

$$\int_P^Q \omega = Q - P.$$

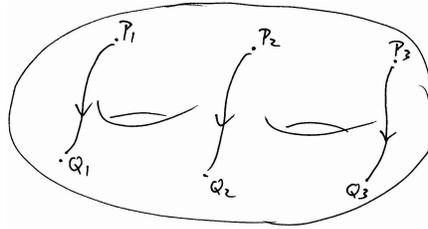
Also gilt:

$$\int_{P_1}^{Q_1} + \dots + \int_{P_d}^{Q_d} \omega = 0 \pmod{\Gamma}$$

genau dann, wenn es existiert ein $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ mit $(f) = \sum Q_i - P_i$.

Wir werden diesen Sachverhalt nun auf beliebige kompakte Riemannsche Flächen verallgemeinern.

Hauptergebnisse



1) Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht g , so ist der Raum $\Omega^1(X)$ der holomorphen Differentiale g dimensional.

2) Satz von Riemann-Roch: Für einen Divisor $D \in \text{Div}(X)$ notieren wir mit

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) \mid (f) + D \geq 0\}$$

den Vektorraum aller meromorphen Funktionen mit "höchstens Polen in D ". Für die Dimension

$$l(D) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$$

gilt

$$l(D) - l(K - D) = \text{Grad } D - g + 1$$

Hierbei ist K ein sogenannter *kanonischer Divisor*, das heißt $K = (\omega)$, wobei $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ ein beliebiges meromorphes Differential bezeichnet.

3) Das *Abelsche Theorem*:

Es existiert ein $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit $(f) = \sum Q_i - P_i$, genau dann, wenn für alle $\omega \in \Omega^1(X)$ gilt

$$\sum \int_{P_i}^{Q_i} \omega = 0 \quad \text{modulo Perioden von } \omega.$$

16. Vorlesung,
Freitag,
16.12.2011
(8-10 Uhr)

Weihnachtstintermezzo

Zu einem Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ erhalten wir eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1.

$$E(\Gamma) := \mathbb{C}/\Gamma$$

Wir wollen nun der Frage nachgehen, wann zwei solche Flächen isomorph sind.

Proposition:

$$E(\Gamma_1) \simeq E(\Gamma_2) \iff \lambda\Gamma_1 = \Gamma_2.$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Wir können durch eventuelle Umbenennung von ω_1, ω_2 erreichen, dass

$$\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$$

gilt. Es ist dann

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \omega_1 \cdot (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$$

wobei

$$\tau := \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{H}$$

Es ist also

$$E(\Gamma) \simeq E_\tau := \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$$

Ist

$$\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$$

so lassen sich ω'_1, ω'_2 linear in ω_1, ω_2 ausdrücken:

$$\begin{aligned} \omega'_2 &= a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega'_1 &= c\omega_2 + d\omega_1 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Die Beziehung zwischen τ' und τ wird durch eine entsprechende *Möbius-Transformation*

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

gegeben. Erinnerung sei an dieser Stelle, dass $PSL_2(\mathbb{R})$ genau die Automorphismengruppe $Aut(\mathbb{H})$ der oberen Halbebene ist, wobei die Wirkung durch

$$PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

gegeben ist.

Die Untergruppe $PSL_2(\mathbb{Z}) \subset PSL_2(\mathbb{R})$ wird *Modulgruppe* genannt. Sie wird erzeugt von den zwei Elementen S und T

$$T: \tau \mapsto \tau + 1; \quad S: \tau \mapsto -1/\tau$$

für die die Relationen

$$S^2 = (ST)^3 = 1$$

gelten.

Proposition: Es ist $E_\tau \simeq E_{\tau'}$ genau dann, wenn τ und τ' in der gleichen Bahn der Modulgruppe liegen.

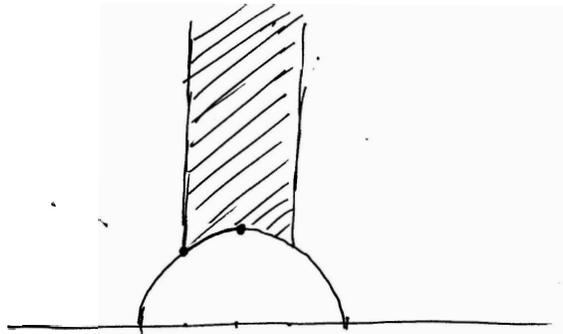
Definition: Ein *Fundamentbereich* für eine Gruppe $G \subset PSL_2(\mathbb{R})$ ist eine Teilmenge $D \subset \mathbb{H}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

1. $gD \cap D = \emptyset$ für alle $g \in G, g \neq \text{Id}$.
2. $\bigcup_{g \in G} g\bar{D} = \mathbb{H}$.

Satz (Dedekind 1877)

Die Menge

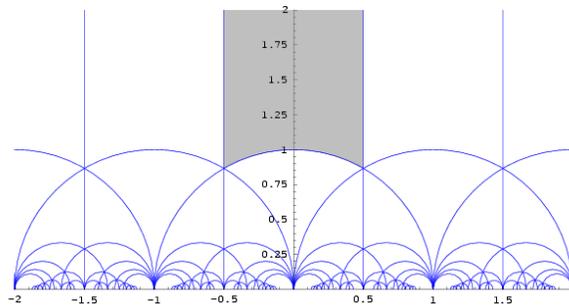
$$D = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| > 1, -1 < \text{Re}(\tau) < 1\}$$



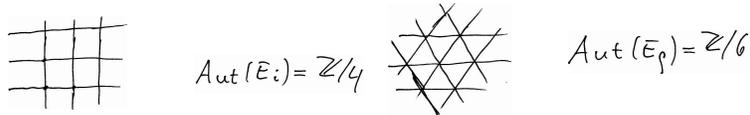
ist ein Fundamentbereich für die Modulgruppe. Da für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\text{Im} \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = \frac{1}{|c\tau + d|^2} \text{Im}(\tau)$$

gilt, folgt, dass jede Bahn unter der Modulgruppe die Menge \bar{D} trifft. Um zu zeigen, dass D tatsächlich ein Fundamentbereich ist, braucht man zusätzliche Argumente. Die Pflasterung von \mathbb{H} mit Kopien von \bar{D} ergibt ein hübsches Bild:



Beachte die zwei speziellen Punkte $\tau = i$ und $\tau = \rho$. Es sind die Fixpunkte von S bzw. ST der Modulgruppe und die entsprechende Gitter $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ haben eine zusätzliche Symmetrie.



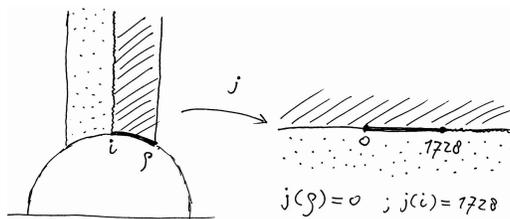
Satz (F. Klein)

Es existiert genau eine holomorphe Funktion

$$j: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften

1. $j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j(\tau)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$
2. j trennt $PSL_2(\mathbb{Z})$ -Bahnen, d.h. nimmt auf verschiedenen Bahnen verschiedene Werte an.
3. $j(\rho) = 0, j(i) = 1728, j(\infty) = \infty$



$j(\tau)$ ist ein sehr bemerkenswerte Funktion. Die Theorie der komplexen Multiplikation zeigt, dass j für imaginär quadratische τ algebraische Werte annimmt.

Wir erinnern an den *Gittersummen*

$$S_{2k}(\Gamma) := \sum_{\omega \in \Gamma'} \frac{1}{\omega^{2k}}$$

die in der Laurentreihenentwicklung der \wp -Funktion

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) S_{2k+2}(\Gamma) z^{2k}$$

auftreten und im Zusammenhang stehen mit den Koeffizienten $g_2 = 60S_4$, $g_3 = 140S_6$ aus der Differentialgleichung der \wp -Funktion

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Wenn wir das Gitter $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ zu $\omega_1(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ normalisieren, so erhalten wir

$$S_{2k}(\Gamma) = \frac{1}{\omega_1^{2k}} \cdot G_{2k}(\tau),$$

wobei

$$G_{2k}(\tau) := \sum_{n,m \neq 0,0} \frac{1}{(n + m\tau)^{2k}}$$

die sogenannte *Eisensteinreihe von Gewicht $2k$* ist. Man überzeugt sich leicht, dass

$$G_{2k}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\tau)$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$ gilt. Funktionen auf \mathbb{H} mit solch einem Transformationsverhalten nennt man *Modulformen von Gewicht $2k$* . Zum Beispiel ist

$$\Delta(\tau) := g_2^3 - 27g_3^2$$

ein Modulform von Gewicht 12. Die *j-Funktion* ist nun definiert als

$$j(\tau) := 1728 \frac{g_2^3}{\Delta(\tau)}$$

und ist somit invariant unter die Wirkung von $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Da Modulformen invariant unter der Transformation $T : \tau \mapsto \tau + 1$ sind, versucht man sie in der Variable

$$q := e^{2\pi i \tau}$$

zu entwickeln. Es ist eine gute Aufgabe die nachfolgende Aussage zu verifizieren.

Proposition: Die q -Entwicklung von G_{2k} wird gegeben durch

$$G_{2k} = 2\zeta(2k) + 2 \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

wobei

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

die Summe der k -ten Potenzen der Teiler einer Zahl n bezeichnet.

Hieraus findet man mit einigem Fleiß

$$j(q) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots,$$

was den Normierungsfaktor 1728 erklärt. Die Koeffizienten dieser Reihe, welche seit dem 19ten Jahrhundert bekannt sind, folgen keinem erkennbaren Bildungsgesetz und ihnen wurde auch keine besondere Bedeutung beigemessen. Das änderte sich schlagartig, als JOHN MCKAY im Jahr 1978 bemerkte, dass

$$196884 = 196883 + 1 \quad !$$



JOHN MCKAY

Die größte der 26 sporadischen einfachen Gruppen hat

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

Elemente und wird *Monstergruppe* genannt. Die kleinste nicht triviale irreduzible Darstellung hat die Dimension

$$196883 = 47 \cdot 59 \cdot 71$$

Zufall? Es schien absurd: zwei weit entfernte Gebiete der Mathematik waren auf einmal miteinander verbunden. Aber was haben komplexe Tori mit einfachen

Gruppen zu tun? CONWAY und NORTON fanden weitere Zusammenhänge und prägten den Begriff *Monstrous Moonshine* um diese verrückte Idee anzudeuten und formulierten konkrete Vermutungen, die BORCHARDS später beweisen konnte und ihm 1998 die Fields-Medaille bescherte. Inzwischen ist einiges mehr verstanden worden, aber der Zusammenhang ist immer noch mysteriös.

17. Vorlesung,
Mittwoch,
11.1.2012 (8-10
Uhr)

(3.2) Analysis auf Mannigfaltigkeiten Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\mathfrak{A}^p(U)$ für den \mathbb{R} -Vektorraum aller p -Formen der Klasse C^∞ . Eine solche Form $\omega \in \mathfrak{A}^p(U)$ hat eine Darstellung als

$$\omega = \sum_{|I|=p} A_I \cdot dx_I,$$

wobei

$$\begin{aligned} I &= (i_1, i_2, \dots, i_p) \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p, |I| = p \\ A_I &= A_{i_1, \dots, i_p} \in C^\infty(U) \\ dx_I &= dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

0-Formen sind nichts anderes als Funktionen: $\mathfrak{A}^0(U) = C^\infty(U)$. 1-Formen sind von der Form

$$\omega = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

mit $A_i \in C^\infty(U)$. Daher ist $\mathfrak{A}^1(U) \simeq C^\infty(U)^n$.

2-Formen haben die Gestalt

$$\omega = \sum_{i < j} A_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

Daher ist $\mathfrak{A}^2(U) \simeq C^\infty(U)^{\binom{n}{2}}$ und allgemein ist

$$\mathfrak{A}^p(U) = \Lambda^p \mathfrak{A}^1(U).$$

Der *Cartan-Kalkül* beschreibt die wichtigsten Rechenregeln für Differentialformen. Das *Dach-Produkt* ist eine bilineare Abbildung

$$\wedge: \mathfrak{A}^p(U) \times \mathfrak{A}^q(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^{p+q}(U),$$

festgelegt durch

$$\begin{aligned} dx_I \wedge dx_J &= dx_{I \cup J} \\ dx_i \wedge dx_i &= 0; \\ dx_i \wedge dx_j &= -dx_j \wedge dx_i. \end{aligned}$$

Die *äußere Ableitung* ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$d: \mathfrak{A}^p(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^{p+1}(U),$$

festgelegt durch

$$d\omega = \sum dA_I \wedge dx_I = \sum \frac{\partial_i A_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I,$$

wenn

$$\omega = \sum A_I dx_I.$$

Die wichtigsten Regeln des *Cartan-Kalküls* sind

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (-1)^{pq} \eta \wedge \omega. \\ d(\omega \wedge \eta) &= d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta. \\ d(d\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Ist $\varphi: V \longrightarrow U$ eine C^∞ -Abbildung, so erhalten wir eine induzierte Abbildung

$$\varphi^*: \mathfrak{A}^p(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^p(V).$$

Für eine 1-Form $\omega = \sum A_i dx_i$ ist

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= \sum_i A_i(\varphi(y)) d\varphi_i(y) \\ &= \sum_{i,j} A_i(\varphi(y)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega \wedge \eta) &= \varphi^* \omega \wedge \varphi^* \eta \\ \varphi^*(d\omega) &= d\varphi^*(\omega). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Karten lassen sich diese Begriffe auf eine beliebige n -dimensionale Mannigfaltigkeit X übertragen. Wir notieren die entsprechenden Vektorräume von p -Formen auf X mit $\mathfrak{A}^p(X)$.



ÉLIE CARTAN
(1869-1951)

Differentialformen sind dafür da, um über „etwas“ integriert zu werden.

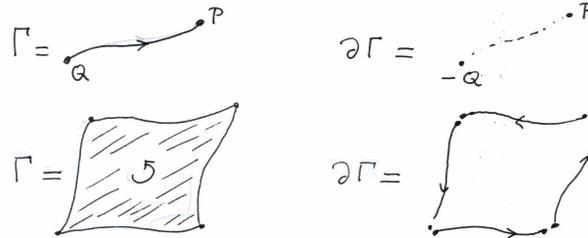
Ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ und $\omega \in \mathfrak{A}^1(U)$, so ist

$$\int_{\gamma} \omega := \int_0^1 \gamma^* \omega = \sum \int_0^1 A_i(\gamma(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt$$

Analog ist für eine p -Form das Integral über einem p -Würfel definiert: Ist $\omega \in \mathfrak{A}^p(U)$ und $\gamma: [0, 1]^p \rightarrow U$, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &:= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \gamma^* \omega \\ &= \sum \int_0^1 \cdots \int_0^1 A_I \left(\frac{\partial x_I}{\partial t_1 \dots t_p} \right) dt_1 \dots dt_p. \end{aligned}$$

Der Rand eines p -Würfels besteht aus 2^p Kopien eines $(p-1)$ -Würfels:



Eine p -Kette ist eine formale \mathbb{Z} -Linearkombination von p -Würfeln. Solche p -Ketten bilden auf offensichtliche Weise eine abelsche Gruppe $W_p(X)$. Der Rand von $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_r$ ergibt sich als lineare Fortsetzung des Randes von p -Würfeln und definiert

$$\partial: W_p(X) \rightarrow W_{p-1}(X).$$

Satz von Stokes

Für $\omega \in \mathfrak{A}^p(X)$ und $\Gamma \in W_{p+1}(X)$ gilt:

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega$$



GEORGE GABRIEL STOKES
(1819-1903)

(3.3) **Homologie & Kohomologie** Die Gleichung

$$\partial \circ \partial = 0$$

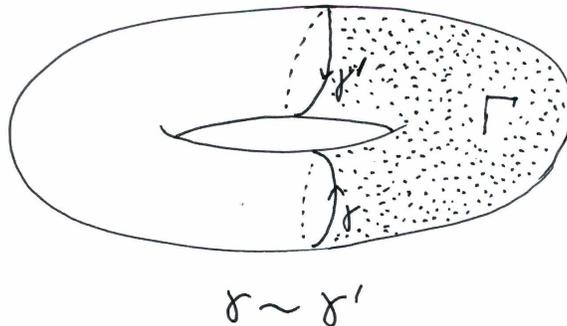
drückt aus, dass der Rand einer Kette selber keinen Rand mehr hat. Gelehrter gesagt erhält man einen *Komplex von abelschen Gruppen*

$$\longrightarrow W_2(X) \xrightarrow{\partial} W_1(X) \xrightarrow{\partial} W_0(X) \longrightarrow 0$$

Eine Kette $\gamma \in W_p(X)$ heißt *Zyklus*, wenn $\partial\gamma = 0$ und *Rand*, wenn es ein $\Gamma \in W_{p+1}(X)$ gibt so, dass $\partial\Gamma = \gamma$ gilt. Da $\partial\partial = 0$ sind die Ränder automatisch Zyklen, aber das Umgekehrte gilt eben nicht immer. Wir schreiben

$$\gamma \sim \gamma', \text{ wenn } \gamma - \gamma' = \partial\Gamma$$

und sagen γ und γ' sind *homolog*.



Man bildet die abelschen Gruppen bestehend aus allen Zyklen und Ränder

$$Z_k(X) := \text{Kern}(W_k(X) \xrightarrow{\partial} W_{k-1}), \quad R_k := \text{Bild}(W_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial} W_k(X))$$

Definition

Die k -te Homologiegruppe ist die Faktorgruppe

$$H_k(X) := Z_k(X) / R_k(X)$$

Elemente von $H_k(X)$ sind also genau die Äquivalenzklassen von homologen Zyklen.

Ganz analog erhalten wir für jede Mannigfaltigkeit X aus der Gleichung

$$dd = 0$$

einen Komplex von \mathbb{R} -Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}^0(X) \xrightarrow{d} \mathfrak{A}^1(X) \xrightarrow{d} \mathfrak{A}^2(X) \longrightarrow \dots$$

Eine Differentialform $\omega \in \mathfrak{A}^p(X)$ heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ gilt und *exakt*, wenn es ein $\eta \in \mathfrak{A}^{p-1}(X)$ gibt so, dass $\omega = d\eta$. Da $dd = 0$ gilt, ist jede exakte Form automatisch geschlossen, aber nicht immer umgekehrt. Wir schreiben

$$\omega \sim \omega' \Leftrightarrow \omega - \omega' = d\eta.$$

und sagen ω und ω' sind *kohomolog*.

Man bildet die Vektorräume aller geschlossene und exakte Formen

$$Z^k(X) := \text{Kern}(\mathfrak{A}^k(X) \xrightarrow{d} \mathfrak{A}^{k+1}(X)), \quad R^k := \text{Bild}(\mathfrak{A}^{k-1}(X) \xrightarrow{d} \mathfrak{A}^k(X))$$

Definition Die k -te deRham Kohomologiegruppe ist der Faktorraum

$$H_{dR}^k(X) := H^k(X, \mathbb{R}) := Z^k(X) / R^k(X)$$

Elemente von $H_{dR}^k(X)$ sind also genau die Äquivalenzklassen von kohomologen geschlossenen Formen.

Proposition: Für einen p -Zyklus $\gamma \in Z_p(X)$ und eine geschlossene Differentialform $\omega \in Z^p(X)$ hängt die Periode

$$\int_{\gamma} \omega$$

nur von den Klassen $[\gamma] \in H_p(X)$ und $[\omega] \in H_{dR}^p(X)$ ab.

Beweis Dies ist eine rein formale Folgerung aus der STOKESSchen Formel.

Ist $\gamma \sim \gamma'$ und $d\omega = 0$, so ist

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma'} \omega,$$

da $\int_{\gamma-\gamma'} \omega = \int_{\partial\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} d\omega = 0$ gilt.

Analog, wenn $\omega \sim \omega'$ und $\partial\gamma = 0$, so ist

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega',$$

da $\int_{\gamma} \omega - \omega' = \int_{\gamma} d\eta = \int_{\partial\gamma} \eta = 0$ gilt. □

Wir haben somit eine wohldefinierte Paarung

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^p(X) \times H_p(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\omega] & [\gamma] & \longmapsto \int_{\gamma} \omega \end{array}$$

Beispiele: Wir beschreiben erst $H_0(X)$ und $H_{dR}^0(X)$ für eine beliebige Mannigfaltigkeit X .

Eine 0-Kette in X ist eine formale Linearkombination von Punkten in X , was wir im Falle einer Riemannschen Fläche auch Divisor genannt haben. Offensichtlich ist $p \sim q$ genau dann, wenn es einen Weg γ von p nach q gibt; es ist dann $q - p = \partial\gamma$. Ist X wegzusammenhängend, so sind alle 0-Ketten homolog zu $n \cdot p$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, also gilt dann $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Besteht X aus r Wegzusammenhangskomponenten, so ist $H_0(X) = \mathbb{Z}^r$. Eine 0-Form auf X ist eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und sie ist geschlossen, wenn $df = 0$. Der Vektorraum $H_{dR}^0(X)$ besteht also aus allen Funktionen mit $df = 0$. Das sind genau die *lokal konstanten* Funktionen, also ist $H_{dR}^0(X) = \mathbb{R}^r$. Die Paarung

$$H_{dR}^0(X) \times H_0(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ordnet jeder lokal konstante Funktion f und jeder 0-Kette $\sum_{i=1}^r n_i P_i$ die Summe

$$\sum_{i=1}^r n_i f(P_i) \in \mathbb{R}$$

zu.

Als zweites Beispiel betrachten wir $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Die Differentialform

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

ist geschlossen, $d\omega = 0$. Der Weg

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow U \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

ist geschlossen, $\gamma(0) = \gamma(1)$. Somit können wir γ als einen Zyklus in U auffassen. Berechne nun, und stelle fest, dass

$$\int_{\gamma} \omega \neq 0$$

gilt. Wir können hieraus folgern $[\omega] \neq 0, [\gamma] \neq 0$, sodass die Rechnung auf jeden Fall zeigt, dass

$$H_{dR}^1(U) \neq 0, H_1(U) \neq 0$$

Es stellt sich heraus, dass

$$H_0(U) = H_1(U) = \mathbb{Z}, H_k(U) = 0, k \geq 2$$

und analog

$$H_{dR}^0(U) = H_{dR}^1(U) = \mathbb{R}, H_{dR}^k(U) = 0, k \geq 2$$

18. Vorlesung,
Freitag,
13.1.2012 (8-10
Uhr)

In der Vorlesung *Topologie* lernen Sie allgemeine Techniken, die es erlauben die Homologiegruppen $H_k(X)$ für konkret gegebene, topologische Räume zu berechnen. Die Bildung der Homologie ist *funktoriell*; dies bedeutet dass nicht nur jedem X Gruppen zugeordnet werden, sondern auch, dass jeden stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räume ein Gruppenhomomorphismus

$$f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$$

induziert. Auf der Ebene der p -Würfel wird dies durch Komposition mit der Abbildung f beschrieben.

Analog verhält es sich bei der deRham-Kohomologie: eine (differenzierbare) Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Mannigfaltigkeiten induziert lineare Abbildungen

$$f^* : H^i(Y) \rightarrow H^i(X).$$

Auf der Ebene der Differentialformen wird dies durch das Zurückziehen: $\omega \mapsto f^*(\omega)$ beschrieben.

Die Berechenbarkeit der Homologiegruppen beruht auf

Homotopieinvarianz der Homologie

Insbesondere gilt für eine sternförmige Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist jeder p -Zyklus ($p > 0$) Rand einer $p + 1$ -Kette.

$$H_0(U) = \mathbb{Z}, H_i(U) = 0, i > 0$$

Die analoge Aussage für Differentialformen ist bekannt unter dem Namen *Poincaré-Lemma*: auf einer sternförmigen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine geschlossene Form auch exakt.

$$H^0(U) = \mathbb{R}, H^i(U) = 0, i > 0$$

Satz von Mayer-Vietoris

Sind $U, V \subset X$ offene Teilmengen von X , so gibt es eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen:

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(U \cup V) \rightarrow H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(U \cup V) \rightarrow \dots$$

Analog findet man eine lange exakte Folge für die deRham-Kohomologie:

$$\dots \rightarrow H^k(U \cup V) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(U \cup V) \rightarrow \dots$$



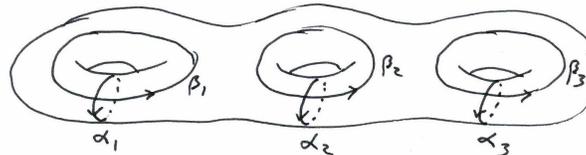
WALTHER MAYER UND LEOPOLD VIETORIS
(1887-1948 1891-2002)

Unter Anwendung dieser Sätze wird in der Vorlesung *Topologie* folgende fundamentale Aussage bewiesen:

Satz

Für eine kompakte, orientierbare Fläche X vom Geschlecht g gilt:

$$\begin{aligned} H_0(X) = \mathbb{Z} & \quad ; \quad H_1(X) = \mathbb{Z}^{2g} & \quad ; \quad H_2(X) = \mathbb{Z} \\ H^0(X) = \mathbb{R} & \quad ; \quad H^1(X) = \mathbb{R}^{2g} & \quad ; \quad H^2(X) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Eine Basis für $H_1(X)$ wird durch die in der Zeichnung angegebenen Zyklen $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ und β_1, \dots, β_g gegeben.

Wir beschreiben die Zusammenhang zwischen Homologie und Kohomologie für den Spezialfall einer kompakten Riemannsche Fläche.

Proposition: Sei X eine Riemannsche Fläche und $\omega \in \mathfrak{A}^1(X)$ eine Differentialform mit $d\omega = 0$.

Dann ist die Kohomologieklassse $[\omega] \in H^1(X)$ durch die Perioden $\int_\gamma \omega$, $\gamma \in H_1(X)$ festgelegt.

Beweis: Ist ω' eine andere geschlossene Form mit $\int_\gamma \omega' = \int_\gamma \omega$ für alle $\gamma \in H_1(X)$, so ist

$$\int_\gamma (\omega - \omega') = 0, \gamma \in H_1(X).$$

Wähle einen Basispunkt $P \in X$ und Q ein variabler Punkt. Die Funktion

$$F(Q) = \int_p^Q (\omega - \omega')$$

ist wohldefiniert, das heisst unabhängig vom gewählten Weg von P nach Q , da der Differenz zweier solche Wege ein Zyklus ist. Es ist

$$dF = \omega - \omega',$$

was nicht anderes sagt als $[\omega] = [\omega']$ □

Proposition: Es sei $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ eine Basis für $H_1(X)$ und $p_1, \dots, p_{2g} \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegebene Zahlen. Dann existiert ein $\omega \in \mathfrak{A}^1(X)$, $d\omega = 0$ mit

$$\int_{\gamma_i} \omega = p_i$$

Beweis: Wir konstruieren geschlossene Differentialformen $\omega_i \in \mathfrak{A}^1(X)$ mit

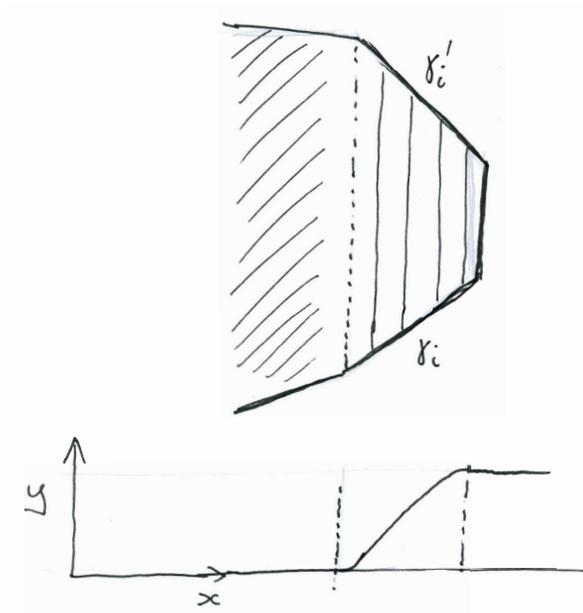
$$\int_{\gamma_i} \omega_i = \delta_{ij}$$

Die Differentialform

$$\omega := \sum_{i=1}^{2g} p_i \omega_i$$

erfüllt dann die Bedingungen.

Wir gehen aus von der Realisierung von X als $4g$ -gon mit Randidentifikation und legen das Polygon in \mathbb{R}^2 wie in der Figur angegeben.



Wähle $\epsilon > 0$ und eine C^∞ -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, mit $f(x) = 0$ für $x \leq \epsilon$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 1 - \epsilon$. Die Funktion $\phi(x, y) := f(x)$ hat nun der Eigenschaft, dass das Differential $\omega_i = d\phi$ mit der Randverklebung verträglich ist und so zu eine Differentialform in $\mathfrak{A}^1(X)$ auf X absteigt. Nach Konstruktion ist $\int_{\gamma_i} \omega_i = f(1) - f(0) = 0$ und $\int_{\gamma_j} \omega_i = 0$. \square

Ein schicke Umformulierung der vorhergehenden zwei Aussagen ist

Satz von deRham

Integration von Differentialformen induziert ein Isomorphismus

$$H^1(X) \simeq \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{R})$$

$$\omega \mapsto (\gamma \mapsto \int_{\gamma} \omega)$$

Es ist also in der Tat $H^1(X) \simeq \mathbb{R}^{2g}$; die Perioden einer Differentialform können ganz beliebig vorgegeben werden. Die Aussage ist auch richtig für beliebige Mannigfaltigkeiten und Kohomologiegruppen:

$$H^k(X) \simeq \text{Hom}(H_k(X), \mathbb{R})$$



GEORGE DE RHAM
(1903-1990)

(3.4) Stern-Operator & Harmonische Formen Wir wollen für jede deRham-Kohomologiekategorie einen besonders schönen Repräsentanten wählen, nämlich eine *harmonische Differentialform*. Erinnerung sei hier an den $*$ -Operator: für eine Differentialform

$$\omega = A dx + B dy \in \mathfrak{A}^1(U), U \subset \mathbb{R}^2$$

ist

$$*\omega = -B dx + A dy.$$

Auf einer Riemannschen Fläche X erhalten wir so einen Operator

$$* : \mathfrak{A}^1(X) \longrightarrow \mathfrak{A}^1(X)$$

In einer Karte wird $*$ wie oben definiert. Der Operator ist wohldefiniert, da die Umkartungsabbildungen holomorph und somit winkeltreu (konform) sind; der Begriff "Drehung um 90-Grad" ist wohldefiniert. Formal folgt dies aus der Rechnung

$$\psi^*(*\omega) = *(\psi^*(\omega))$$

wenn ψ holomorph ist.

Der Operator

$$d * d : \mathfrak{A}^0(X) \longrightarrow \mathfrak{A}^2(X)$$

spielt die Rolle des *Laplace-Operators*, da dieser in einer Karte die Darstellung

$$d * d f = \Delta(f) dx dy$$

bestitzt.

Definition: Sei X eine Riemannsche Fläche.

- Eine Funktion $f \in \mathfrak{A}^0(X)$ heißt *harmonisch*, wenn $d * df = 0$
- Eine 1-Form $\omega \in \mathfrak{A}^1(X)$ heißt *harmonisch*, wenn $d\omega = d * \omega = 0$.

Notation: Der \mathbb{R} -Vektorraum der harmonischen Differentialformen ist

$$\mathcal{H}(X) := \{\omega \in \mathfrak{A}^1(X) \mid d\omega = d * \omega = 0\}$$

Bemerke, dass wenn $f \in \mathfrak{A}^0(X)$ eine harmonische Funktion ist, dann ist $\omega := df$ eine harmonische 1-Form. Eine harmonische Differentialform hat *lokal* die Form df , mit $d * df = 0$.

Wir definieren jetzt auf $\mathfrak{A}^1(X)$ eine *Prä-Hilbertraum-Struktur*.

Definition: Für $\omega, \eta \in \mathfrak{A}^1(X)$ setzen wir

$$(\omega, \eta) := \int_X \omega \wedge * \eta \quad (< \infty, \text{ wenn } X \text{ kompakt}).$$

In einer Karte können wir

$$\omega = A dx + B dy ; \quad \eta = C dx + D dy$$

schreiben und erhalten dann

$$(A dx + B dy) \wedge *(C dx + D dy) = (A.C + B.D) dx \wedge dy.$$

Hieraus sehen wir, dass $(-, -)$ bilinear, symmetrisch und positiv definit ist. Ausserdem ist $*$ eine Isometrie:

$$(\omega, \eta) = (*\omega, *\eta)$$

Die Norm von ω ist definiert durch

$$\|\omega\| := \sqrt{(\omega, \omega)}$$

Wir erhalten so einen Prähilbertraum $(\mathfrak{A}^1(X), (-, -))$.

Es ist jedoch kein Hilbertraum, da $\mathfrak{A}^1(X)$ sicherlich nicht vollständig ist: Es ist einfach sich CAUCHY-Folgen von C^∞ -Funktionen vorzustellen, deren „Grenzwert“ nicht mehr in $\mathfrak{A}^0(X)$ liegt.

19. Vorlesung,
Mittwoch,
18.01.2012
(8-10 Uhr)

Proposition: Für eine kompakte Riemannsche Fläche X und $\omega \in \mathfrak{A}^1(X)$ gilt

$$\begin{aligned} d\omega = 0 &\Leftrightarrow (\omega, *df) = 0 && \text{für alle } f \in \mathfrak{A}^0(X) \\ d * \omega = 0 &\Leftrightarrow (\omega, df) = 0 && \text{für alle } f \in \mathfrak{A}^0(X) \end{aligned}$$

Beweis: Da $** = -1$ und $(\omega, \eta) = (*\omega, *\eta)$, sind die zwei Aussagen äquivalent. Aus

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$

sehen wir, dass

$$\int_X f d\omega + \int_X df \wedge \omega = \int_X d(f\omega) = \int_{\partial X} f\omega = 0$$

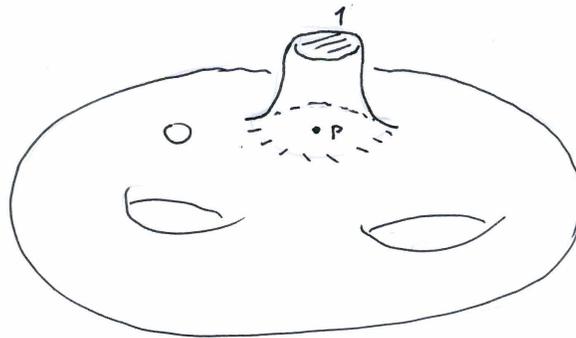
gilt. Also ist

$$\int_X f d\omega = \int_X \omega \wedge df = - \int_X \omega \wedge (*df) = -(\omega, *df).$$

Ist $d\omega = 0$, so folgt $(\omega, *df) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{A}^0(X)$. Die umgekehrte Implikation folgt aus folgender Überlegung: Ist $d\omega(p) \neq 0$, so ist in einer Karte $d\omega = F dx dy$ mit $F(p) \neq 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $F(p) > 0$ voraussetzen und finden eine Umgebung U von p , wo $F > 0$. Mit Hilfe des unten stehenden Lemmas finden wir ein $\rho \in \mathfrak{A}^0(X)$ mit $\rho \geq 0$, $\rho = 0$ auf $X \setminus U$ und $\rho = 1$ auf $U' \subset U$. Dann ist $\int \rho d\omega \neq 0$ und somit $(\omega, *d\rho) \neq 0$. \square

Lemma: Sei X eine Mannigfaltigkeit, $p \in X$ und $U \subset X$ eine Umgebung von p . Dann existiert eine Umgebung $U' \subset X$ von p und eine C^∞ -Funktion $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

1. $\rho(p) \geq 0$
2. $\rho(p) = 0$ für alle $p \in X \setminus U$
3. $\rho(p) = 1$ für alle $p \in U'$



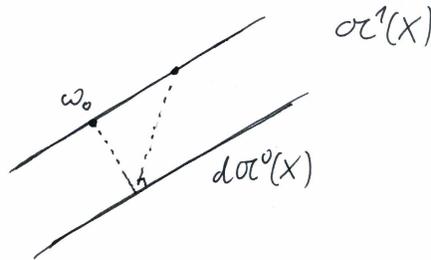
Proposition: Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X sind alle harmonischen Funktionen konstant.

Beweis: Angenommen, $d * df = 0$, dann ist

$$\|df\|^2 = (df, df) = \int_X df \wedge *df = - \int_X f d * df = 0.$$

Also $df = 0$, d. h. f ist konstant. □

(3.5) Der Fundamentalsatz Ist $\omega \in \mathfrak{A}^1(X)$ mit $d\omega = 0$, so suchen wir $\omega_0 = \omega + df$ so, dass $\|\omega_0\|$ minimal ausfällt



Dies passiert genau dann, wenn $(\omega_0, df) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{A}^0(X)$. Es ist dann $d * \omega_0 = d\omega_0 = 0$. Also ist $\omega_0 \in \mathcal{H}(X)$. Wir erwarten also: Zu jedem $\omega \in \mathfrak{A}^1(X)$ mit $d\omega = 0$ existiert ein $\omega_0 \sim \omega$ mit $\omega_0 \in \mathcal{H}(X)$.

Satz I (Poisson-Gleichung)

Zu jedem $\rho \in \mathfrak{A}^2(X)$ mit $\int_X \rho = 0$ existiert ein $f \in \mathfrak{A}^0(X)$ mit

$$d * df = \rho.$$

Satz II (Zerlegungssatz)

Für alle $\omega \in \mathfrak{A}^1(X)$ existieren $\omega_0 \in \mathcal{H}(X)$, $f_1, f_2 \in \mathfrak{A}^0(X)$, so dass

$$\omega = \omega_0 + df + *df_2.$$

Es ist eine einfache Aufgabe, festzustellen, dass die Unterräume $\mathcal{H}(X)$, $d\mathfrak{A}^0(X)$ und $*d\mathfrak{A}^0(X)$ von $\mathfrak{A}^1(X)$ bezüglich $(-, -)$ senkrecht aufeinander stehen. Die Zerlegung ist also eindeutig.

Die Aussagen von Satz I und Satz II sind zueinander äquivalent.

Satz I \Rightarrow Satz II: Bestimme f_1 und f_2 aus

$$\begin{aligned} d * df_1 &= d * \omega \\ d * df_2 &= d\omega \end{aligned}$$

Setze $\omega_0 := \omega - df_1 - *df_2$. Dann ist $\omega_0 \in \mathcal{H}(X)$, weil

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= d\omega - d * df_2 = 0 \\ d * \omega_0 &= d * \omega - d * df_1 = 0. \end{aligned}$$

Also haben wir die gewünschte Zerlegung

$$\omega = \omega_0 + df_1 + *df_2$$

gefunden.

Satz II \Rightarrow **Satz I**: Ist $\rho \in \mathfrak{A}^2(X)$ mit $\int_X \rho = 0$, so finden wir $\lambda \in \mathfrak{A}^1(X)$ mit $\rho = d\lambda$, da $H^2(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}; \rho \mapsto \int_X \rho$.

Wende nun den Zerlegungssatz auf λ an und schreibe

$$\lambda = \lambda_0 + df_1 + *df_2$$

Es folgt

$$\rho = d\lambda = d * df_2$$

Also löst f_2 die Poisson-Gleichung. □

Für ein $\omega \in \mathfrak{A}^1(X)$ liefert der Zerlegungssatz eine Darstellung

$$\omega = \omega_0 + df_1 + *df_2 \quad \text{mit } \omega_0 \in \mathcal{H}(X).$$

Ist $d\omega = 0$, so folgt $d * df_2 = 0$, d. h. f_2 ist harmonisch und somit konstant. Die Zerlegung reduziert sich in diesem Fall also auf

$$\omega = \omega_0 + df,$$

was ausdrückt, dass $[\omega] = [\omega_0]$, d. h. ω_0 ist der harmonische Repräsentant von $[\omega]$.

Folgerung:

Für eine kompakte Riemannsche Fläche X von Geschlecht g gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(X) = 2g$$

Beweis-Strategie für Satz I:

1. Wir definieren das *Dirichlet-Skalar Produkt* auf $\mathfrak{A}^0(X)$ durch

$$(f, g)_D := (df, dg).$$

Da $(f, g)_D = 0$ für f konstant, ist dies entartet. Wir betrachten deswegen $V := \mathfrak{A}^0(X)/\mathbb{R}$, das heißt, wir arbeiten „modulo konstante Funktion“ und erhalten einen Prähilbertraum

$$(V, (-, -)_D).$$

2. Wir suchen $f \in \mathcal{A}^0(X)$ mit $d * df = \rho$. Da $d(g * df) = df \wedge *df + g d * df$ erhalten wir nach \int_X :

$$(g, f)_D = \int_X \rho \cdot g$$

3. Die Abbildung $L: V \rightarrow \mathbb{R}; g \mapsto -\int_X \rho \cdot g$ ist linear (wohldefiniert, weil $\int_X \rho = 0$).

Proposition: L ist stetig, d. h. es existiert ein $C > 0$

$$|L(g)| \leq C \cdot \|g\|_D$$

Dies ist eine relativ einfache Abschätzung.

4. In einem Hilbertraum $(H, (-, -))$ gilt der **RIESZSCHEN Darstellungssatz**: ist $l: H \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und linear, so existiert ein $f \in H$ so dass

$$(f, v) = L(v) \text{ für alle } v \in H.$$

(d. h. $l \in H' = H$, Hilberträume sind „selbst-dual“).

5. Sei \widehat{V} = Vervollständigung von V bezüglich $(-, -)_D$. $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ erweitert sich automatisch zu $\widehat{L}: \widehat{V} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Aus dem RIESZSCHEN Darstellungssatz erhalten wir ein $\widehat{f} \in \widehat{V}$ mit

$$(\widehat{f}, g)_D = -\int_p \rho \cdot g$$

6. **WEYLSCHES LEMMA**: Jede distributionelle Lösung von $\Delta f = \rho$ (auf \mathbb{E}) ist automatisch C^∞ . Dies impliziert, dass $\widehat{f} \in V$ gilt.



HERMANN WEYL
(1885-1955)

20. Vorlesung,
 Freitag,
 20.01.2012
 (8-10 Uhr)

(3.6) Komplexe Differentialformen Es ist sinnvoll, auf einer Riemannschen Fläche auch *komplex-wertige* C^∞ -Differentialformen zu betrachten. Wir setzen

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^p(X) := \mathfrak{A}^p(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Durch \mathbb{C} -lineare Fortsetzung von d erhalten wir einen Komplex von \mathbb{C} -Vektorräumen

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^0(X) \xrightarrow{d} \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^1(X) \xrightarrow{d} \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^2(X) \xrightarrow{d} \dots$$

Die Kohomologie-Gruppe dieses Komplexes ist

$$H^i(X, \mathbb{C}) \simeq H^i(X) \otimes \mathbb{C}$$

Der $*$ -Operator hat ebenfalls eine \mathbb{C} -lineare Erweiterung zu

$$*: \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^1(X) \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^1(X);$$

das Skalar-Produkt wird durch

$$(\omega, \eta) := \int_X \omega \wedge * \bar{\eta}$$

zu einer *hermiteschen Bilinearform* fortgesetzt.

Definition:

$$\mathfrak{A}^{01}(X) := \text{kern}(* - i Id): \text{Vektorraum der } (0,1)\text{-Formen}$$

$$\mathfrak{A}^{10}(X) := \text{kern}(* + i Id): \text{Vektorraum der } (1,0)\text{-Formen}$$

Um diese Räume besser zu verstehen, werden wir unsere Differentialformen in Karten ausschreiben

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy,$$

(wobei A, B \mathbb{C} -wertig und C^∞) und anschließend in

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$$

ausdrücken. Für den Leser halten wir folgendes fest:

Formularium

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy & dx &= \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ d\bar{z} &= dx - i dy & dy &= \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \end{aligned}$$

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$$

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_z + \partial_{\bar{z}} & \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \partial_y &= i\partial_z - i\partial_{\bar{z}} & \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \end{aligned}$$

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta$$

Weiter sehen wir

$$\begin{aligned} * dz &= -i d\bar{z} \\ * d\bar{z} &= i dz, \end{aligned}$$

so dass $\mathfrak{A}^{01}(X)$ aus genau den Differentialformen besteht, die von der Form $A d\bar{z}$ sind und $\mathfrak{A}^{10}(X)$, die von der Form $B dz$ sind.

Eine beliebige 1-Form lässt sich eindeutig als Summe einer $(0,1)$ -Form und einer $(1,0)$ -Form schreiben

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^1(X) = \underset{\substack{\uparrow \\ *=-i}}{\mathfrak{A}^{10}(X)} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ *=i}}{\mathfrak{A}^{01}(X)}$$

Wir setzen weiter

$$\mathfrak{A}^{00}(X) := \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^0(X) \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}^{11}(X) := \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^2(X)$$

Das magische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}^{01}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathfrak{A}^{11}(X) \\ \bar{\partial} \uparrow & & \uparrow \bar{\partial} \\ \mathfrak{A}^{00}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathfrak{A}^{10}(X) \end{array}$$

Die Abbildungen ∂ und $\bar{\partial}$ haben die folgende lokale Beschreibung:

$$\begin{aligned} \partial: \mathfrak{A}^{00}(X) &\longrightarrow \mathfrak{A}^{10}(X); & f &\longmapsto \partial_z f \cdot dz \\ \bar{\partial}: \mathfrak{A}^{00}(X) &\longrightarrow \mathfrak{A}^{01}(X); & f &\longmapsto \partial_{\bar{z}} f \cdot d\bar{z} \\ \partial: \mathfrak{A}^{01}(X) &\longrightarrow \mathfrak{A}^{11}(X); & A d\bar{z} &\longmapsto \partial_z A dz \wedge d\bar{z} \\ \bar{\partial}: \mathfrak{A}^{10}(X) &\longrightarrow \mathfrak{A}^{11}(X); & A dz &\longmapsto \partial_{\bar{z}} A d\bar{z} \wedge dz = -\partial_{\bar{z}} A dz d\bar{z} \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \partial \cdot \partial &= \bar{\partial} \cdot \bar{\partial} = \partial \cdot \bar{\partial} + \bar{\partial} \cdot \partial = 0 \\ d &= \partial + \bar{\partial} \\ d * df &= \Delta f \cdot dx dy = 2i \partial_z \partial_{\bar{z}} dz d\bar{z} = 2i \bar{\partial} \partial f \end{aligned}$$

Bemerke, dass $\ker(\bar{\partial}: \mathfrak{A}^{00}(X) \rightarrow \mathfrak{A}^{01}(X))$ aus Funktionen f mit $\bar{\partial}f = 0$, das heisst, *holomorphe* Funktion besteht. Analog besteht $\ker(\partial: \mathfrak{A}^{00}(X) \rightarrow \mathfrak{A}^{10}(X))$ aus *anti-holomorphen* Funktionen.

Definition:

$$\begin{aligned} \Omega^1(X) &= \ker(\mathfrak{A}^{10}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathfrak{A}^{11}(X)) && \text{holomorphe Differentiale} \\ \overline{\Omega^1(X)} &= \ker(\mathfrak{A}^{01}(X) \xrightarrow{\partial} \mathfrak{A}^{11}(X)) && \text{anti-holomorphe Differentiale} \end{aligned}$$

Wir schreiben in diesen Abschnitt kurz:

$$A := \Omega^1(X), \quad \bar{A} := \overline{\Omega^1(X)}$$

Proposition: Für kompakte Riemannsche Flächen gilt:

$$\begin{aligned} A \oplus \bar{A} &\hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \\ \alpha + \beta &\longmapsto [\alpha] + [\beta] \end{aligned}$$

Beweis: Ist $[\alpha + \beta] = 0$, so ist $\alpha + \beta = df$. Dann ist $\alpha = \partial f$ und $\beta = \bar{\partial}f$ und $0 = d\alpha = \bar{\partial}\alpha = \bar{\partial}\partial f$; und genau so $0 = d\beta = \partial\bar{\partial}f = 0$. Hieraus folgt, dass f harmonisch, und somit konstant ist. Es folgt $\alpha = \beta = 0$. \square

Satz

(Hodge-Zerlegung)

$$H^1(X, \mathbb{C}) = A \oplus \bar{A}$$

„Jede komplexe de Rham Klasse lässt sich eindeutig als Summe einer holomorphen und einer anti-holomorphen Differentialform darstellen.“

Beweis: Sei $[\omega] \in H^1(X, \mathbb{C})$; schreibe $\omega = \alpha + \beta$ mit $\alpha \in \mathfrak{A}^{10}(X)$, $\beta \in \mathfrak{A}^{01}(X)$; setze $\rho = \bar{\partial}\alpha$. Dann gibt es nach Satz I ein $f \in \mathcal{A}^{00}(X)$, so dass $\bar{\partial}\bar{\partial}f = \rho$ gilt.

Setze $\tilde{\omega} = \omega + df = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, wobei $\tilde{\alpha} = \alpha + \partial f$, $\tilde{\beta} = \beta + \bar{\partial}f$.

Dann erhalten wir

$$\bar{\partial}\tilde{\alpha} = \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}\partial f = \rho + \bar{\partial}\partial f = \rho - \partial\bar{\partial}f = 0$$

Also ist $\tilde{\alpha} \in A$. Analog finden wir $\tilde{\beta} \in \bar{A}$. Insgesamt erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathbf{C}) &\longrightarrow A \oplus \bar{A} \\ [\omega] &\longmapsto \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \end{aligned}$$

Diese ist injektiv: Angenommen $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$, dann $\alpha = -\partial f$, $\beta = -\bar{\partial} f$ und somit $\omega = \alpha + \beta = -df$, also $[\omega] = 0$. \square

Folgerung: Für eine kompakte Riemannsche Fläche gilt

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega^1(X) = g$$

Wir werden auch etwas über den Kokern von $\bar{\partial}$ brauchen.

Proposition: Die Abbildung

$$\bar{A} \longrightarrow \mathfrak{A}^{01}(X) / \bar{\partial} \mathfrak{A}^{00}(X), \alpha \mapsto [\alpha] := \alpha \bmod \bar{\partial} \mathfrak{A}^{00}(X)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: $[\alpha] = 0$ bedeutet, dass $\alpha = \bar{\partial} f$ für ein $f \in \mathfrak{A}^{00}$ ist. Da $\alpha \in \bar{A}$ ist, gilt $\partial \alpha = 0$. Also ist $\partial \bar{\partial} f = 0$, was bedeutet, dass f harmonisch ist. Da X kompakt ist, ist f konstant, und somit $\alpha = 0$. Da Abbildung $\alpha \mapsto [\alpha]$ ist also *injektiv*. Ist $\eta \in \mathfrak{A}^{01}(X)$, so finden wir durch Lösung der Poisson-Gleichung ein $f \in \mathfrak{A}^{00}(X)$ mit $\partial \bar{\partial} f = \partial \eta$. Der Differentialform $\eta - \bar{\partial} f$ ist im Kern von ∂ und liegt somit in \bar{A} . \square

Folgerung: Für eine kompakte Riemannsche Fläche gilt

$$\dim_{\mathbf{C}} (\mathfrak{A}^{01}(X) / \bar{\partial} \mathfrak{A}^{00}(X)) = g$$

Um Schreibarbeit zu sparen werden wir

$$B := \mathfrak{A}^{01}(X) / \bar{\partial} \mathfrak{A}^{00}(X)$$

schreiben.

Ganz analog zeigt man natürlich, dass

$$A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}^{10} / \partial \mathfrak{A}^{00}$$

21. Vorlesung,
Mittwoch,
25.01.2012
(8-10 Uhr)

(3.7) Satz von Riemann-Roch Wir wissen bis jetzt noch nicht, ob auf einer kompakten Riemannschen Fläche X überhaupt nicht konstante meromorphe Funktionen existieren. Für einen Divisor $D \in \text{Div}(X)$ setzen wir

Definition:

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X)^* \mid D + (f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

Dies ist der Vektorraum aller meromorphen Funktionen auf X „mit Polen höchstens in D “. Genauer, ist $D = n_1P_1 + \dots + n_rP_r$, so ist $f \in \mathcal{L}(D)$ genau dann, wenn

$$v_{P_i}(f) \geq -n_i$$

Ist $n_i \geq 0$, so hat f höchstens ein Pol der Ordnung n_i in P_i ; ist $n_i < 0$, so hat f in P_i eine Nullstelle der Ordnung $\geq -n_i$.

Unser Ziel ist es jetzt, eine Formel für

$$l(D) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(D))$$

zu finden. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $D \geq 0$ ist, d. h. $D = \sum n_i P_i$ mit $n_i \geq 0$. Wir wählen kleine Umgebungen U_i der Punkte P_i und setzen $U := \bigcup_{i=1}^r U_i$.

Setze weiter $U^* = U \setminus \{P_1, \dots, P_r\}$ und

$$\begin{aligned} H(D) &:= \{\varphi \in \mathcal{O}(U^*) \mid \varphi \text{ meromorph und } (\varphi) + D \geq 0\} / \mathcal{O}(U) \\ &= \{\varphi \in \mathcal{O}(U^*) \mid v_{P_i}(\varphi) \geq -n_i\} / \text{Idem } v_{P_i} \geq 0 \end{aligned}$$

$H(D)$ ist der Vektorraum der *Hauptteile* von meromorphen Funktionen auf U mit Polordnungen beschränkt durch D .

Als Beispiel betrachten wir $U = \mathbb{E} \subset \mathbb{C}$ und $D = nP$, $P = 0$.

$$f = \underbrace{\frac{a_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z}}_{\text{Hauptteil}} + a_0 + a_1z + \dots$$

Offensichtlich ist

$$\dim H(D) = \sum_{i=1}^r n_i = \text{Grad}(D)$$

Wir wählen jetzt C^∞ -Funktionen $\rho_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

1. $0 \leq \rho_i(p) \leq 1$
2. $\rho_i(p) = 0$ für alle $p \in X \setminus U_i$
3. $\rho_i(p) = 1$ für alle $p \in U'_i$, wobei $V_i \subset U_i$.

Setze $\rho = \sum \rho_i \in \mathfrak{A}^{00}(X)$, $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$ und $V^* = V \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$. Die Funktion $\rho\varphi$ ist C^∞ auf $X \setminus \text{supp}D$, und holomorph auf $V^* \cup (X \setminus U)$. Die

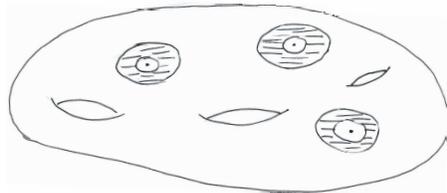
Differentialform $\bar{\partial}(\rho\varphi)$ ist somit 0 auf $X \setminus U$ und auf V . Sie „lebt“ also auf der Vereinigung der Ringgebiete um den Punkte P_i .

Wir definieren eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma: H(D) &\longrightarrow B \\ [\varphi] &\longmapsto [\bar{\partial}(\rho \cdot \varphi)] \end{aligned}$$

wobei $B := \mathfrak{A}^{01}(X)/\bar{\partial}\mathfrak{A}^{00}(X)$ ein Vektorraum der Dimension g ist.

Diese Abbildung ist wohldefiniert: Ist $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, so ist $\rho \cdot \varphi \in \mathfrak{A}^{00}(X)$ und somit $[\bar{\partial}(\rho\varphi)] = 0$ in $\mathfrak{A}^{01}(X)/\bar{\partial}\mathfrak{A}^{00}(X)$.



Proposition:

$$l(D) = \dim(\ker(\gamma)) + 1$$

Beweis: Ist $[\varphi] \in \ker(\gamma)$, so bedeutet dies $[\bar{\partial}(\rho\varphi)] = 0$, d. h. $\bar{\partial}(\rho\varphi) = \bar{\partial}h$ für ein $h \in \mathfrak{A}^{00}(X)$.

Es folgt

$$\bar{\partial}(\rho\varphi - h) = 0.$$

Die Funktion $f := \rho\varphi - h$ ist somit holomorph auf $X \setminus \text{supp}D$ und der Hauptteil von f ist gerade $[\varphi]$, da $\rho \equiv 1$ auf V und $h \in \mathfrak{A}^{00}(X)$. Insbesondere ist

$$(f) + D \geq 0$$

d. h. $f \in \mathcal{L}(D)$. Da eine meromorphe Funktion auf einer kompakten Riemannschen Fläche bis auf Addition einer Konstante durch ihren Hauptteil festgelegt ist, folgt die Behauptung. \square

Folgerung:

$$l(D) = \text{Grad}(D) - g + 1 + \dim \text{Kokern}(\gamma)$$

Dies folgt sofort aus der exakten Folge

$$0 \longrightarrow \ker(\gamma) \longrightarrow H(D) \xrightarrow{\gamma} B \longrightarrow \text{Kokern}(\gamma) \longrightarrow 0$$

und der Tatsache, dass $\dim_{\mathbb{C}} B = g$ und $\dim(H(D)) = \text{Grad } D$ sind.

Satz
(Riemannsche Ungleichung)

$$\boxed{l(D) \geq \text{Grad}(D) - g + 1}$$

Folgerungen: Ist $\text{Grad}(D) \geq g + 1$, so existiert ein *nicht-konstantes* $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit

$$(f) + D \geq 0.$$

Wenn wir Punkte P_1, P_2, \dots, P_{g+1} auf X wählen, so finden wir ein nicht-konstantes $f \in \mathcal{M}^*(X)$ mit einem Pol höchstens der Ordnung 1 in P_1, \dots, P_{g+1} . Ist $P \in X$, so finden wir ein nicht-konstantes $f \in \mathcal{M}^*(X)$, holomorph auf $X \setminus P$ und mit einem Pol der Ordnung $\leq g + 1$ in P .

So ein f definiert eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ vom Grad $\leq g + 1$.

Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g ist also realisierbar als eine höchstens $g + 1$ blättrige Überlagerung von \mathbb{P}^1 !

(3.8) Der Roch-Teil von Riemann-Roch Wir wollen den Kokern der Abbildung

$$H(D) \xrightarrow{\gamma} B$$

genauer untersuchen. Es stellt sich heraus, dass wir den Dualraum genau beschreiben können.

Da $\text{Kokern}(\gamma) = B/\text{Bild}(\gamma)$, folgt aus der linearen Algebra, dass

$$\text{Kokern}(\gamma)^* = \{\lambda \in B^* \mid \lambda|_{\text{Bild}(\gamma)} = 0\}$$

Hierbei ist $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$ der Dualraum eines k -Vektorraums.

Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, so induziert die nicht-ausgeartete Paarung

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{10}(X) \times \mathfrak{A}^{01}(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega, \eta &\longrightarrow \int_X \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

eine nicht-ausgeartete Paarung

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega, [\eta] &\longrightarrow \int_X \omega \wedge \eta, \end{aligned}$$

so dass wir A als Dualraum von B auffassen können. Somit erhalten wir

$$\text{Kokern}(\gamma)^* \simeq \{\omega \in A \mid \langle \omega, \gamma(\varphi) \rangle = 0 \text{ für alle } \varphi \in H(D)\}.$$

Proposition: Für $\omega \in A$, $\varphi \in H(D)$ gilt

$$\langle \omega, \gamma(\varphi) \rangle = 2\pi i \sum_{i=1}^r \text{Res}_{P_i}(\omega\varphi).$$

Beweis: Nach der Definition ist

$$\langle \omega, \gamma(\varphi) \rangle = \int_X \omega \wedge \bar{\partial}(\rho\varphi).$$

Wir haben

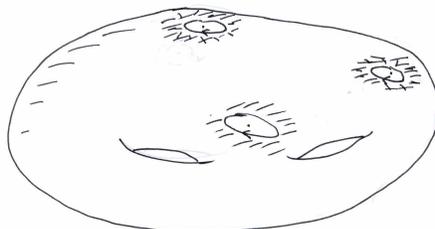
$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\rho\varphi\omega) &= \bar{\partial}(\rho\varphi) \wedge \omega + \rho\varphi\bar{\partial}\omega \\ &= \bar{\partial}(\rho\varphi) \wedge \omega = -\omega \wedge \bar{\partial}(\rho\varphi) \end{aligned}$$

weil $\bar{\partial}\omega = 0$ ist.

$$\text{Also erhalten wir } \langle \omega, \gamma(\varphi) \rangle = - \int_X \bar{\partial}(\rho\varphi\omega) = - \int_X d(\rho\varphi\omega).$$

Dieses Integral ist nicht null, weil wir den Satz von Stokes nicht direkt anwenden können, da $\rho\varphi\omega$ keine C^∞ -Form ist: Sie hat Pole in den P_i .

Wir wenden Stokes auf $X \setminus V$ an. Der Rand $\partial(X \setminus V)$ besteht aus r Zyklen $-\gamma_i$, welche einmal (im Uhrzeigersinn) um P_i laufen.



Also:

$$\begin{aligned} - \int_X d(\rho\varphi\omega) &= - \int_{X \setminus V} d(\rho\varphi\omega) \\ &= - \int_{\partial(X \setminus V)} \rho\varphi\omega \\ &= \sum_{i=1}^r \int_{\gamma_i} \omega\varphi = 2\pi i \sum_{i=1}^r \text{Res}_{P_i}(\omega\varphi). \end{aligned}$$

Satz von Roch

$$\text{Kokern}(\gamma)^* \simeq \Omega_X^1(-D) := \{\omega \in A \mid v_{P_i}(\omega) \geq n_i\}$$

Beweis: Ist $\sum \text{Res}_{P_i}(\omega\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in H(D)$, so muss insbesondere $\text{Res}_{P_i}(\omega\varphi) = 0$ sein für alle $\varphi \in \mathcal{O}(U_i^*)$ mit $v_{P_i}(\varphi) \geq -n_i$.

Drücken wir ω und φ mit Hilfe eines lokalen Parameters z aus als

$$\omega = f(z)dz; \quad \varphi = \frac{a_{n_i}}{z^{n_i}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + \text{holomorph}$$

so sehen wir, dass $\text{Res}_{P_i}(\omega\varphi) = 0$ für alle solche φ genau dann, wenn $v_{P_i}f(z) \geq n_i$, d. h. $v_{P_i}(\omega) \geq n_i$. \square



GUSTAV ROCH
(1839-1866)

Definition: Ein *kanonischer Divisor* ist ein Divisor der Form

$$K = (\omega)$$

für ein meromorphes Differential ω .

So ein ω liefert einen Isomorphismus

$$\mathcal{L}(K - D) \longrightarrow \Omega_X^1(-D), \quad f \mapsto f \cdot \omega$$

Folgerung: Ist K ein kanonischer Divisor, so gilt

$$\dim \text{Kokern}(\gamma)^* = l(K - D)$$

Eine direkte Folgerung ist

Satz von Riemann-Roch

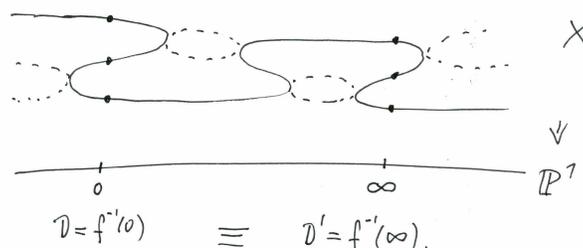
$$l(D) - l(K - D) = \text{Grad } D - g + 1$$

Wir haben den Satz von Riemann-Roch nur für positive Divisoren D bewiesen. Die Aussage gilt aber für beliebige Divisoren; der Beweis im allgemeinen Fall ist nur unwesentlich schwieriger, aber wir werden ihn an dieser Stelle nicht ausführen.

22. Vorlesung,
Freitag,
27.01.2012
(8-10 Uhr)

Definition: Zwei Divisoren D und $D' \in \text{Div}(X)$ heißen *linear äquivalent*, $D \equiv D'$, wenn es ein $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit

$$D = (f) + D'$$



gibt. Wenn $D \equiv D'$, dann ist $\mathcal{L}(D) \approx \mathcal{L}(D')$ und somit $l(D) = l(D')$. Zwei meromorphe Differentiale ω, ω' unterscheiden sich um eine meromorphe Funktion, $\omega = f \cdot \omega'$, sodass

$$(\omega) = (f) + (\omega')$$

Zwei kanonische Divisoren sind somit linear äquivalent.

Wir zeigen einige direkte Folgerungen aus **Riemann-Roch**:

1. Nehme $D = 0$. Wir finden

$$1 - l(K) = -g + 1$$

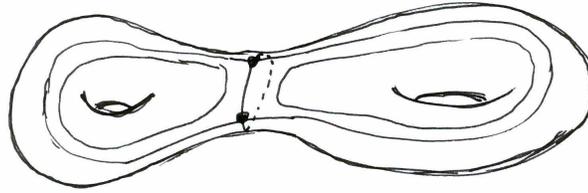
also $l(K) = g$. In der Tat: Wir wissen schon, dass es einen g -dimensionalen Raum von holomorphen Differentialen gibt: $\dim A = g$. Ist $K = (\omega)$, $f \in \mathcal{L}(K)$, so ist $f \omega \in A$.

2. Nehme $D = K$. Wir finden

$$l(K) - l(0) = \text{Grad}(K) - g + 1$$

Also: $\text{Grad}(K) = 2g - 2$.

Wir lernen hieraus, dass ein holomorphes Differential in $2g - 2$ Punkten verschwindet!



3. Ist $D \equiv D'$, so ist $\text{Grad } D = \text{Grad } D'$. Ist $\text{Grad } D < 0$, so kann es kein f mit $(f) + D \geq 0$ geben. Ist also $\text{Grad } (D) < 0$, so ist $l(D) = 0$.

Aus Riemann-Roch sehen wir

$$\text{Grad } D \geq 2g - 1 \Rightarrow l(D) = \text{Grad } (D) - g + 1.$$

(3.9) Die Perioden-Relationen Im Beweis des Satzes von Roch spielte die Paarung

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^1(X) \times \mathfrak{A}^1(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega, \eta &\longmapsto \langle \omega, \eta \rangle := \int_X \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

eine entscheidende Rolle.

Dies steigt ab zu einer nicht-ausgearteten Paarung

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathbb{C}) \times H^1(X, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [\omega], [\eta] &\longrightarrow \int_X \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

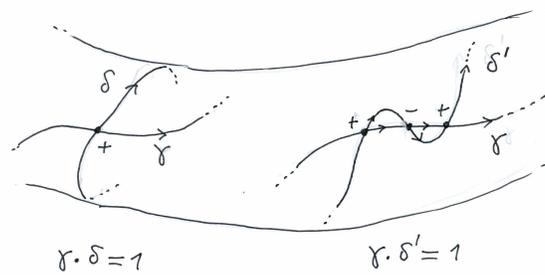
Erinnere, dass eine Differentialform durch ihre Periode festgelegt wird

$$H^1(X, \mathbb{C}) = \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{C})$$

Es ist eine fundamentale Tatsache, dass die Paarung $\langle -, - \rangle$ „dual“ ist zu der *Schnitt-Paarung*

$$\begin{aligned} H_1(X) \times H_1(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \gamma, \delta &\longmapsto \gamma \cdot \delta \end{aligned}$$

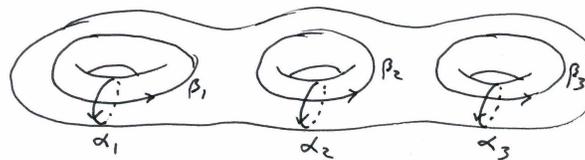
welche zwei Zyklen ihre *Schnittzahl* $\gamma \cdot \delta$ zuordnet.



Wir haben gesehen, wie wir eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g$ für $H_1(X)$ angeben können, für die

$$\begin{aligned} \alpha_i \cdot \alpha_j &= 0, \beta_i \cdot \beta_j = 0 \\ \alpha_i \cdot \beta_j &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

gilt.

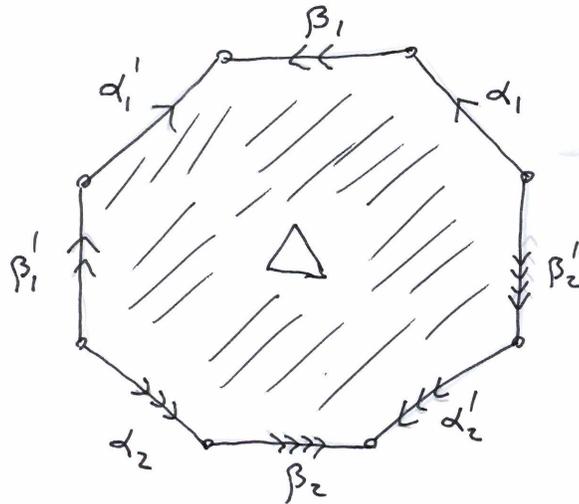


Eine solche Basis für $H_1(X)$ nennen wir *kanonische* oder *symplektische Basis*.

Satz: Für zwei geschlossene Differentialformen $\omega, \eta \in \mathcal{A}_C^1(X)$ gilt

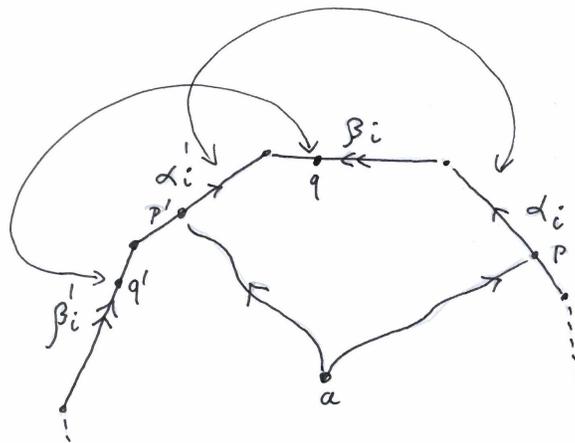
$$\langle \omega, \eta \rangle = \sum_{i=1}^g \int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta$$

Beweis: Wir gehen von der Darstellung von X als $4g$ -gon Δ mit Randidentifikationen aus



Hierbei werden die Randkomponenten α_i mit α'_i und β_i mit β'_i identifiziert. Wähle einen Basispunkt $a \in X \setminus \partial\Delta$ und setze $\varphi(z) = \int_a^z \omega$. Dies ist eine C^∞ -Funktion auf Δ mit $d\varphi = \omega$.

Es gelten folgende „Sprung-Relationen“ für Integrale von a zu entsprechenden Punkten p und p' auf $\partial\Delta$:



$$p \in \alpha_i; p' \in \alpha'_i : \varphi(p) + \int_{\beta_i} \omega = \varphi(p')$$

$$p \in \beta_i; p' \in \beta'_i : \varphi(p) - \int_{\alpha_i} \omega = \varphi(p')$$

Ist η geschlossen, so finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i} \varphi \eta - \int_{\alpha'_i} \varphi \eta &= \int_{\alpha_i} \varphi \eta - \int_{\alpha_i} \left(\varphi + \int_{\beta_i} \omega \right) \eta \\ &= - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\int_{\beta_i} \varphi \eta - \int_{\beta'_i} \varphi \eta = \int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta$$

Da

$$\partial \Delta = \sum_{i=1}^g \alpha_i - \alpha'_i + \sum_{i=1}^g \beta_i - \beta'_i$$

finden wir durch Addieren aller dieser Integrale

$$\int_{\partial \Delta} \varphi \eta = \sum_{i=1}^g \int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta$$

Mit dem Satz von Stokes folgt

$$\langle \omega, \eta \rangle = \int_X \omega \wedge \eta = \int_{\partial \Delta} \varphi \eta$$

und somit die Behauptung. \square

Anwendungen:

1. Sind $\omega, \eta \in A = \Omega^1(X)$, so ist $\langle \omega, \eta \rangle = 0$, sodass

$$\int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta = \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta$$

Dies wird die *erste Riemannsche Periodenrelation* genannt (**Riemann I**).

2. Ist $\omega \in A$, $\eta = \bar{\omega} \in \bar{A}$, so ist $i \int_X \omega \wedge \bar{\omega} \geq 0$, (und $= 0$ nur wenn $\omega = 0$), da $dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$, sodass

$$i \left(\int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \bar{\omega} - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \bar{\omega} \right) \geq 0$$

(und nur $= 0$ wenn $\omega = 0$).

Dies wird die *zweite Riemannsche Periodenrelation* genannt (**Riemann II**).

23. Vorlesung,
Mittwoch,
01.02.2012
(8-10 Uhr)

Für eine symplektische Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g \in H_1(X)$ einer kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g haben wir gesehen, dass

$$\int_X \omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^g \int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta$$

gilt. Hierbei sind $\omega, \eta \in \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^1(X)$ zwei geschlossene 1-Formen auf X .

Sind speziell $\omega, \omega' \in \Omega^1(X)$, so folgt **Riemann I**:

$$\sum_{i=1}^g \int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \omega' = \sum_{i=1}^g \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \omega'$$

und **Riemann II**:

$$i \left(\sum \int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \bar{\omega} - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \bar{\omega} \right) \geq 0$$

und $= 0$ nur, wenn $\omega = 0$.

Da $\int_{\alpha_i} \bar{\omega} = \overline{\int_{\alpha_i} \omega}$ sehen wir aus **Riemann II**, dass $\int_{\alpha_i} \omega = 0$ für $i = 1, \dots, g$ nur passieren kann, wenn $\omega = 0$ ist. Dies impliziert, dass der erste $g \times g$ -Block der Periodenmatrix

$$\Pi = \left[\int_{\alpha_i} \omega_j \mid \int_{\beta_j} \omega_j \right]$$

vollen Rang besitzt. Wir können somit eine sogenannte *normalisierte Basis* $\omega_1, \dots, \omega_g$ für $\Omega^1(X)$ finden, mit der Eigenschaft, dass

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}.$$

Der zweite Block der Matrix Π

$$\int_{\beta_i} \omega_j = \Omega_{ij}$$

erfüllt dann

$$\begin{aligned} \text{Riemann I} & : \quad \Omega = \Omega^T \\ \text{Riemann II} & : \quad \text{Im}(\Omega) \text{ ist positiv definit.} \end{aligned}$$

Diese zwei Bedingungen definieren den *Siegelschen Halbraum* (vom Grade g)

$$\mathbb{H}_g := \{ \Omega \in \text{Mat}(g \times g), \mathbb{C} \mid \Omega = \Omega^T, \text{Im}(\Omega) \geq 0 \},$$

einer höher dimensionalen Verallgemeinerung der üblichen oberen Halbebene $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1$.

(3.10) Das Abelsche Theorem Wir zeigen nun

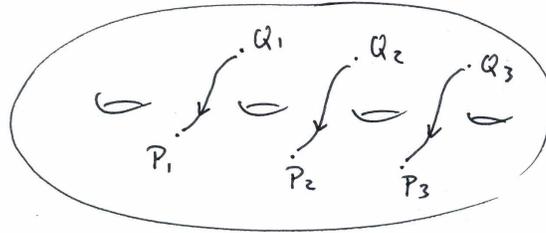
Satz

(Abelsche Theorem)

Für eine kompakte Riemannsche Fläche X und einen Divisor $D \in \text{Div}(X)$ mit $\text{Grad}(D) = 0$ sind äquivalent:

A) Es gibt ein $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit $(f) = D$.

B) Es gibt eine 1-Kette Γ mit $\partial\Gamma = D$ und $\int_{\Gamma} \omega = 0$ für alle $\omega \in \Omega^1(X)$.



$$\partial\Gamma = P_1 + P_2 + P_3 - (Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

Ist $D = (P_1 + \dots + P_r) - (Q_1 + \dots + Q_r)$, so finden wir ein Γ mit $\partial\Gamma = D$, indem wir Wege von Q_i nach P_i wählen. Zwei solche Wahlen für Γ unterscheiden sich um einen Zyklus. Die zweite Aussage der Äquivalenz lässt sich auch ausdrücken als

$$\int_{\Gamma} \omega = 0 \quad \text{mod Perioden von } \omega$$

für beliebig gewähltes Γ mit $\partial\Gamma = D$.

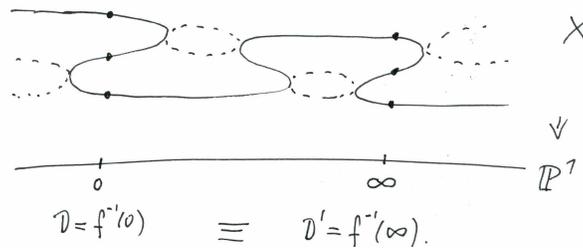
Beweis von A) \Rightarrow B): Ist $f: X \rightarrow Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung vom Grad d zwischen kompakten Riemannschen Flächen und $\omega \in \Omega^1(X)$, so liefert folgende Konstruktion ein holomorphes Differential $\text{Spur}(\omega) \in \Omega^1(Y)$. Ist $U \subset Y \setminus B$ eine offene Menge, über welcher Urbilder $U_i \xrightarrow{\sim} U$ liegen, so setze $\tau_i: U \xrightarrow{\sim} U_i$ und

$$\text{Spur}(\omega)|_U = \sum_{i=1}^d \tau_i^*(\omega).$$

Dies liefert ein wohldefiniertes Differential $\text{Spur}(\omega) \in \Omega^1(Y \setminus B)$, welches sich aber erweitert zu einem global definierten Differential $\text{Spur}(\omega) \in \Omega^1(Y)$. (Aufgabe!)

Ist nun $f \in \mathcal{M}^*(X)$ mit $(f) = D$, so definiert f eine holomorphe Abbildung

$$f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$$



Es ist $D = f^{-1}(0) - f^{-1}(\infty)$. Wähle einen Weg γ von ∞ nach 0 so, dass $\partial\gamma = \underline{0} - \underline{\infty}$. Das Urbild $\Gamma := f^{-1}(\gamma)$ ist auf natürliche Weise eine 1-Kette mit $\partial\Gamma = D$. Es gilt $\text{Spur}(\omega) = 0$, da es auf \mathbb{P}^1 keine holomorphen Differentiale gibt. Also finden wir

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\gamma} \text{Spur}(\omega) = \int_{\gamma} 0 = 0.$$

□

Der Beweis der Rückrichtung ist von größerer Bedeutung. Wir müssen unsere Funktion $f \in \mathcal{M}(X)^*$ aus der Integralbedingung konstruieren. Wir gehen so vor wie in Kapitel 1, wo wir eine solche Funktion für einen Divisor auf einem Gebiet konstruiert haben.

Ist $(f) = D$, $D = \sum n_i P_i$ mit $\sum n_i = 0$, so ist

$$\eta = d \log f = \frac{df}{f}$$

ein meromorphes Differential auf X mit den folgenden Eigenschaften:

1. η ist holomorph auf $X \setminus \text{supp} D$
2. η hat Pole der Ordnung 1 in P_i
3. $\text{Res}_{P_i}(\eta) = n_i$

Aus η können wir durch eine Integration versuchen f zurück zu gewinnen

$$f(z) = \exp \int_a^z \eta,$$

wobei für das Integral ein Weg von a nach z gewählt werden muss. Dies ist nur dann wegunabhängig, wenn

4.

$$\int_{\gamma} \eta \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

für alle geschlossenen Wege in $X \setminus \text{supp} D$ gilt.

Es ist „leicht“ η 's zu konstruieren, für die die Bedingungen 1), 2) und 3) erfüllt sind.

Proposition: Für ein meromorphes Differential η auf X gilt

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\eta) = 0.$$

Sind umgekehrt $P_1, \dots, P_r \in X$ und $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r \in \mathbb{C}$ mit $\sum \rho_i = 0$ gegeben, so existiert ein meromorphes Differential η mit Polen erster Ordnung in P_i und $\text{Res}_{P_i} \eta = \rho_i$.

Beweis: Die erste Aussage ist eine einfache Anwendung des Satzes von Stokes und ist dem Leser überlassen.

Aus dem Satz von Riemann-Roch erhalten wir

$$l(-D) - l(K + D) = -r - g + 1,$$

wobei wir $D = P_1 + P_2 + \dots + P_r$ gesetzt haben. Also ist

$$l(K + D) = g + r - 1.$$

Hieraus sehen wir die Abbildung, welche η seinen r Residuen zugeordnet hat, ein $r - 1$ -dimensionales Bild, da der Kern gerade der g -dimensionale Vektorraum der holomorphen Differentiale ist. Dieser $r - 1$ -dimensionale Raum muss also durch die Bedingung gegeben sein, dass die Summe der Residuen $= 0$ ergibt. \square

Ein η , welches 1), 2), 3) erfüllt, ist eindeutig bis auf Addition eines holomorphen Differentials. Ist $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g \in \Omega^1(X)$ eine normalisierte Basis und

$$\int_{\alpha_i} \eta = \lambda_i,$$

so gilt für $\tilde{\eta} = \eta - \sum_{i=1}^g \lambda_i \omega_i$ die Bedingung

$$\int_{\alpha_i} \tilde{\eta} = 0.$$

Solche $\tilde{\eta}$ wollen wir *normalisiert* nennen und sind dem Divisor D (und Basis α_i, β_i) *eindeutig* zugeordnet.

Definition: Sind $P, Q \in X$ das „Normaldifferential der 3. Sorte“ η_{PQ} ist das eindeutig durch folgende Bedingungen festgelegte meromorphe Differential

- a) η_{PQ} ist holomorph auf $X \setminus \{P, Q\}$
- b) η_{PQ} hat Pole 1. Ordnung in P und Q
- c) $\text{Res}_P \eta_{PQ} = 1; \text{Res}_Q \eta_{PQ} = -1$
und zusätzlich
- d) $\int_{\alpha_i} \eta_{PQ} = 0$

Ist $D = (P_1 + \dots + P_r) - (Q_1 + \dots + Q_r)$, so ist

$$\eta_D := \sum_{i=1}^r \eta_{P_i Q_i}$$

das normalisierte Differential, welches 1), 2) und 3) erfüllt.

Proposition: Sei η meromorph mit Polen erster Ordnung in P_1, \dots, P_r ; ω holomorph, $\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g$ symplektische Basis für $H_1(X)$. Dann gilt

$$\int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta = 2\pi i \sum_{i=1}^r \text{Res}_{P_i}(\eta) \varphi(P_i),$$

wobei die $\varphi(P_i)$ im Beweis definiert werden.

Beweis: Wir gehen von der Realisierung von X als $4g$ -gon Δ mit Randidentifikationen aus. Wir sorgen dafür, dass $P_i \notin \partial\Delta$

Wähle einen Basispunkt $a \in \Delta \setminus \partial\Delta$, $a \neq P_i$ und definiere

$$\varphi(z) = \int_a^z \omega,$$

wobei wir z mit a durch einen Weg verbinden, welcher in Δ verläuft. Wir bekommen mit dem Residuen-Satz

$$\int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta - \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta = \int_{\partial\Delta} \varphi \eta = 2\pi i \sum_{i=1}^r \text{Res}_{P_i}(\eta) \varphi(P_i).$$

Folgerung: Für eine normalisierte Basis $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ gilt

$$\boxed{\int_{\beta_i} \eta_{PQ} = 2\pi i \int_Q^P \omega_i,}$$

wobei das Integral von P nach Q in Δ verläuft.

Dies ist das Geheimnis des „Normaldifferentials der 3. Sorte“: Seine β_i -Periode ist genau das unbestimmte Integral $\int_Q^P \omega_i$.

Folgerung:

$$\int_{\beta_i} \eta_D = 2\pi i \int_{\Gamma^*} \omega_i,$$

wobei Γ^* Kette in Δ mit $\partial\Gamma^* = D$.

Beweis von $B) \Rightarrow A)$ vom Abelschen Theorem.

Angenommen, es ist $\int_{\Gamma} \omega_i = 0 \quad i = 1, \dots, g$. Wir können

$$\Gamma^* = \Gamma + \gamma$$

schreiben, wobei $\gamma = \sum n_i \alpha_i + m_i \beta_i; \quad n_i, m_i \in \mathbb{Z}$.

Dann ist

$$\int_{\Gamma^*} \omega_i = \int_{\Gamma} \omega_i.$$

Betrachte

$$\tilde{\eta} = \eta_D - 2\pi i \sum_{j=1}^g m_j \omega_j.$$

Dann finden wir

$$\int_{\alpha_i} \tilde{\eta} = 0 - 2\pi i m_i \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\beta_i} \tilde{\eta} &= \int_{\beta_i} \eta_D - 2\pi i \sum_{j=1}^g m_j \int_{\beta_i} \omega_j \\ &= (2\pi i) \int_{\gamma} \omega_i - (2\pi i) \sum m_i \int_{\beta_i} \omega_j \\ &= 2\pi i n_i \in 2\pi i \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Also erfüllt $\tilde{\eta}$ die Bedingungen 1), 2), 3) und 4) und wir finden unser f als

$$f(z) = \exp \int_a^z \eta.$$

□

§4. Anwendungen

24. Vorlesung,
Freitag,
3.2.2012 (8-10
Uhr)

(4.1) Umdeutung des Abelschen Theorems

Ist $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ ein Basis für den Vektorraum $\Omega^1(X)$ der holomorphen Differentiale auf einer kompakten Riemannschen Fläche X , so erhalten wir für jeden $\gamma \in H_1(X)$ einen *Periodenvektor*

$$P(\gamma) := \left(\int_{\gamma} \omega_1, \int_{\gamma} \omega_2, \dots, \int_{\gamma} \omega_g \right)$$

und wir erhalten hierdurch einen Homomorphismus

$$P : H_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}^g, \gamma \mapsto P(\gamma)$$

von abelschen Gruppen.

Proposition: Das Bild von P ist ein Gitter $\approx \mathbb{Z}^{2g}$ in $\mathbb{C}^g \approx \mathbb{R}^{2g}$

Beweis: Wir müssen zeigen, dass die Periodenvektoren

$$P(\gamma_1), P(\gamma_2), \dots, P(\gamma_{2g})$$

über \mathbb{R} linear unabhängig sind, wenn $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}$ eine Basis für $H_1(X)$ ist. Angenommen, es gäbe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2g} \in \mathbb{R}$ so, dass

$$0 = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i P(\gamma_i)$$

Dann wäre auch

$$0 = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \overline{P(\gamma_i)}$$

Dies heisst aber, dass für $i = 1, 2, \dots, g$

$$\int_{\gamma} \omega_i = \int_{\gamma} \overline{\omega_i} = 0,$$

wobei wir

$$\gamma := \sum \lambda_i \gamma_i \in H^1(X) \otimes \mathbb{R}$$

gesetzt haben. Da aber die $\omega_i, \overline{\omega_i}$ eine Basis für $H_{dR}^1(X, \mathbb{C})$ bilden folgt aus dem Satz von DERHAM, dass $\gamma = 0$ ist, was der linearen Unabhängigkeit der γ_i widerspricht. \square

Wir setzen nun

$$\Lambda := \text{Bild}(P) \subset \mathbb{C}^g$$

Ist $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_g$ eine symplektische Basis für $H_1(X)$ und $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ eine normalisierte Basis, so ist

$$\Lambda = \mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g.$$

wobei

$$\Omega = \left(\int_{\beta_i} \omega_j \right) \in \mathbb{H}_g$$

die Periodenmatrix ist.



CARL GUSTAV JACOBI
(1804-1851)

Definition: Die *Jacobivarietät* von X ist

$$Jac(X) = \mathbb{C}^g / \Lambda$$

Da $\mathbb{C}^g \approx \mathbb{R}^{2g} / \mathbb{Z}^{2g} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$ gilt, ist $Jac(X)$ ein reeller $2g$ -dimensionaler Torus. Aus diesem Grund wird $Jac(X)$ auch als *Jacobi-Torus*, oder kurz *die Jacobische* von X genannt.

Definition: Die ABEL-JACOBI Abbildung ist der Homomorphismus von Gruppen

$$AJ : Div^0(X) \longrightarrow Jac(X)$$

$$D = \partial\Gamma \mapsto \left(\int_{\Gamma} \omega_1, \int_{\Gamma} \omega_2, \dots, \int_{\Gamma} \omega_g \right)$$

Dies ist wohldefiniert, da die Differenz zwischen zwei Wahlen Γ und Γ' ein Zyklus ist und somit nach Λ abgebildet wird.

Eine direkte Umdeutung vom Abelschen Theorem ist nun der folgende

Satz

Der Kern des Abel-Jacobi Homomorphismus ist genau die Untergruppe der Hauptdivisoren

$$\text{Kern}(AJ) = \{(f) \mid f \in \mathcal{M}(X)^*\}$$

Definition: Wir setzen $\mathcal{P}(X) := \{(f) \mid f \in \mathcal{M}(X)^*\} \subset \text{Div}(X)$.

$$Cl^0(X) := \text{Div}^0(X) / \mathcal{P}(X).$$

$$Cl(X) := \text{Div}(X) / \mathcal{P}(X).$$

Diese Gruppen werden *Divisorenklassengruppen* von X genannt. Beachte weiter die exakte Folge

$$0 \longrightarrow Cl^0(X) \longrightarrow Cl(X) \xrightarrow{\text{Grad}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Folgerung: Die Abel-Jacobi Abbildung induziert einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$Cl^0(X) \hookrightarrow \text{Jac}(X)$$

Erstaunlicherweise ist diese Abbildung sogar ein *Isomorphismus*. Dafür gab JACOBI folgendes Argument. Wir wählen erst einen festen Basis-Divisor

$$B = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_g, \quad Q_i \in X$$

Proposition: Die Abbildung

$$X \times X \times \dots \times X \longrightarrow Cl^0(X)$$

$$(P_1, P_2, \dots, P_g) \mapsto \sum_{i=1}^g P_i - Q_i$$

ist surjektiv, d.h. jeder Divisor $D \in \text{Div}^0(X)$ ist linear äquivalent zu einem Divisor der Form $\sum_i P_i - Q_i$.

Beweis: Ist $D \in \text{Div}^0(X)$, so ist nach dem Satz von Riemann-Roch

$$l(D + B) \geq 1,$$

also gibt es einen effektiver Divisor $D' = P_1 + P_2 + \dots + P_g$ mit $D \equiv D + B$. Daher ist $D \equiv D' - B = \sum_{i=1}^g P_i - Q_i$. \square

Die zusammengesetzte Abbildung

$$X \times X \times \dots \times X \longrightarrow Cl^0(X) \longrightarrow \text{Jac}(X)$$

ist also eine Abbildung zwischen zwei kompakten, komplexen Mannigfaltigkeiten der Dimension g . Man rechnet nach, dass die Jacobideterminante nicht

identisch verschwindet und es folgt dann aus allgemeinen Sätzen aus der komplexen Analysis, dass die Abbildung $X \times X \times \dots \times X \rightarrow Jac(X)$ auch surjektiv ist.

Das *Jacobische Umkehrproblem* fragt nach einer expliziten Inversen zu dieser Abbildung: gegeben komplexe Zahlen I_1, I_2, \dots, I_g , finde P_1, P_2, \dots, P_g so, dass

$$\sum_{i=1}^g \int_{Q_i}^{P_i} \omega_j = I_j$$

gilt. Riemann hat für das Umkehrproblem eine fantastische Lösung mit Hilfe der Theta-Funktion in $z = (z_1, z_2, \dots, z_g)$

$$\theta(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n^T \Omega n + 2\pi i n^T \cdot z)$$

gegeben. Der Verschwindungsort von $\theta(z)$ definiert eine Teilmenge

$$\Theta_k := \{z \mid \theta(z+k) = 0\} \subset Jac(X).$$

Betrachte die Abbildung

$$\phi : X \rightarrow Jac(X); P \mapsto AJ(P - Q)$$

Für geeignete k schneidet die Kurve $\phi(X)$ die Menge Θ_k in den gesuchten Punkten P_1, P_2, \dots, P_g !

Beachte, dass auch das abelsche Additionstheorem mit obenstehenden zusammenhängt. Ist $D = R_1 + R_2 + \dots + R_N - NQ \in Div^0(X)$, so existieren $P_1, P_2, \dots, P_g \in X$ so, dass

$$D \equiv P_1 + P_2 + \dots + P_g - g \cdot Q$$

gilt. Für $\omega \in \Omega^1(X)$ folgt dann

$$\int_Q^{R_1} \omega + \int_Q^{R_2} \omega + \dots + \int_Q^{R_N} \omega = \int_Q^{P_1} \omega + \dots + \int_Q^{P_g} \omega \quad \text{mod Perioden.}$$

Eine Summe von Integralen ist also immer auf eine Summe von höchstens g Integralen reduzierbar. Die Aussage ist in zwei Hinsichten stärker als in der Einleitung formuliert. Zum einen können wir für alle $\omega \in \Omega^1(X)$ die gleichen P_1, P_2, \dots, P_g nehmen. Zum Anderen trifft hier Gleichheit bis auf eine Konstante zu. Die Aussage ist aber schwächer in der Hinsicht, dass sie sich nur auf holomorphen Differentiale bezieht und auch die "Algebraizität" der Abhängigkeit von P_i von der R_j hier außer Betracht bleibt.

Beziehung zwischen Divisoren $D \in \text{Div}(X)$ und Einbettungen $\varphi_D: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ beschreiben.

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel: $X = \mathbb{P}^1$; $D = n\infty$. Es ist dann $\mathcal{L}(D) = \langle 1, t, t^2, \dots, t^n \rangle$. Durch „Einsetzen“ erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ t &\longmapsto (1, t, t^2, \dots, t^n) = (X_0, X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Diese Abbildung hat zwei kleine Schönheitsfehler. Erstens ist die Abbildung für $t = \infty$ nicht definiert und zweites bildet $\psi \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ in der Hyperebene $X_0 = 1$ ab. Interessanterweise können beide durch einen einzigen Griff elegant behoben werden.

Definition: Der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$ zu einem k -Vektorraum V ist die Menge aller Ursprungsgeraden in V .

Also ist $\mathbb{P}(V) := V \setminus \{0\} / \sim$, wobei $v \sim w$ genau dann, wenn ein $\lambda \in k^*$ existiert mit $v = \lambda w$.

Speziell für $V = \mathbb{C}^{n+1}$, $k = \mathbb{C}$ schreiben wir

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$$

Durch die Topologie auf \mathbb{C} erhält \mathbb{P}^n mit der Quotiententopologie die Struktur eines topologischen Raumes; es ist eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Punkte von \mathbb{P}^n werden mit *homogenen Koordinaten* beschrieben:

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) := [(x_0, x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{P}^n$$

Es ist also $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (y_0 : y_1 : \dots : y_n)$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gibt mit

$$x_i = \lambda y_i \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n.$$

Es gibt eine Einbettung

$$\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n; (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (1 : x_1 : \dots : x_n).$$

Das Bild besteht aus allen Punkten von \mathbb{P}^n mit $x_0 \neq 0$. Auf diese Weise können wir \mathbb{P}^n als Kompaktifizierung von \mathbb{C}^n auffassen.

Die oben beschriebene Abbildung hat nun eine stetige Erweiterung zu

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^n; & t &\longmapsto (1 : t : \dots : t^n) \\ & & \infty &\longmapsto (0 : 0 : \dots : 1) \end{aligned}$$

Bemerke, dass

$$(1 : t : t^2 : \dots : t^n) = (t^{-n} : t^{-n+1} : \dots : t^{-1} : 1),$$

wenn $t \mapsto \infty$, dann $t^{-1} \mapsto 0$.

Dies können wir folgendermaßen verallgemeinern: Für

$$f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)^*$$

setzen wir

$$S := \{p \in X \mid p \text{ ist Pol eines der } f_i\} \cup \{p \in X \mid f_i(p) = 0 \text{ für } i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Dann erhalten wir eine Abbildung

$$\psi: X \setminus S \longrightarrow \mathbb{P}^n; p \longmapsto (f_0(p) : \dots : f_n(p)).$$

Proposition: ψ besitzt eine stetige Erweiterung zu $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^n$.

Beweis: Ist $p \in S$ und z ein lokaler Parameter, definiert in einer kleinen Umgebung U von p , so können wir die f_i in eine Laurent-Reihe entwickeln und schreiben:

$$f_i(z) = z^{n_i} g_i(z),$$

wobei $n_i := v_p(f_i)$. Mit

$$m := \min\{n_i \mid i = 0, \dots, n\}$$

können wir

$$f_i = z^m \tilde{f}_i$$

schreiben. Da m minimal gewählt wurde, ist $\tilde{f}_i(p) \in \mathbb{C}$ und es gibt ein i für die $\tilde{f}_i(p) \neq 0$.

Es ist

$$\begin{aligned} (f_0(z) : \dots : f_n(z)) &= (z^m \tilde{f}_0(z) : \dots : z^m \tilde{f}_n(z)) \\ &= (\tilde{f}_0(z) : \dots : \tilde{f}_n(z)) \end{aligned}$$

Setze $\varphi(p) := (\tilde{f}_0(p) : \dots : \tilde{f}_n(p))$. □

Wir werden dies nun auf die Räume $\mathcal{L}(D)$, $D \in \text{Div}(X)$, anwenden. Wenn $\ell(D) = n + 1$ und $\mathcal{L}(D) = \langle f_0, \dots, f_n \rangle$, so erhalten wir

$$\varphi_D: X \longrightarrow \mathbb{P}^n; p \longmapsto (f_0(p) : \dots : f_n(p)).$$

Als Beispiel sei hier noch einmal $X = E(\Gamma) = \mathbb{C}/\Gamma$ angeführt; Nimm $D = 3\cdot 0$. Dann ist

$$\mathcal{L}(D) = \langle 1, \wp, \wp' \rangle$$

$$\begin{aligned}\varphi_D : E(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{P}^2; & z &\longmapsto (1: \wp(z): \wp'(z)) \\ & & 0 &\longmapsto (0: 0: 1)\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt eine koordinatenfreie Beschreibung von φ_D geben.

Definition: Das (vollständige) Linearsystem von D ist

$$|D| := \{D' \in \text{Div}(X) \mid D' \geq 0 \text{ und } D' \equiv D\}.$$

Proposition: Es gibt eine Bijektion

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \xrightarrow{\sim} |D|$$

Ist $f \in \mathcal{L}(D)$, so ist $D' := (f) + D$ ein positiver Divisor $\equiv D$, also $D' \in |D|$. Dieser Divisor legt f bis auf einen multiplikativen Faktor fest.

Wir werden auch den zu $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ dualen projektiven Raum brauchen: Ist V ein k -Vektorraum und $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$ der duale k -Vektorraum, so heißt $\mathbb{P}(V^*)$ der zu $\mathbb{P}(V)$ duale projektive Raum. Bemerke, dass die Punkte von $\mathbb{P}(V^*)$ genau den Hyperebenen in V (und $\mathbb{P}(V^*)$) entsprechen.

Ein $\lambda \in V^*$ ist eine lineare Abbildung $\lambda: V \rightarrow k$ und $\ker(\lambda) \subset V$ ist eine Hyperebene, wenn $\lambda \neq 0$ ist. Hieraus erhalten wir $\mathbb{P}(\ker(\lambda)) \subset \mathbb{P}(V)$.

Für $D \in \text{Div}(X)$ und $p \in X$ haben wir

$$\mathcal{L}(D) \supseteq \mathcal{L}(D - P).$$

Es können zwei Fälle auftreten:

- a) $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D - P)$. Dies passiert genau dann, wenn $f(p) = 0$ für alle $f \in \mathcal{L}(D)$. Wir sagen dann: p ist ein *Basispunkt* von $|D|$ aller Divisoren $D' \in |D|$ enthaltenen p . Wir nennen die Menge

$$B_D = \{p \in X \mid \mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D - P)\}$$

den Basispunkt von $|D|$.

- b) $\mathcal{L}(D) \neq \mathcal{L}(D - P)$. Das Verschwinden in p stellt eine echte Bedingung dar. In diesem Fall ist $\ell(D - P) = \ell(D) - 1$.

Definition: Angenommen $B_D = \emptyset$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\varphi_D: X &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)^*) \\ p &\longmapsto \mathcal{L}(D - P) \subsetneq \mathcal{L}(D)\end{aligned}$$

Proposition: Wenn für alle $P, Q \in X$

$$\ell(D - P - Q) = \ell(D) - 2,$$

gilt, so ist $B_D = \emptyset$ und $\varphi_D: X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)^*)$.

Beweis: Wir haben

$$\mathcal{L}(D) \supset \mathcal{L}(D - P) \supset \mathcal{L}(D - P - Q).$$

Wenn $\ell(D - P - Q) = \ell(D) - 2$ ist, so gilt

$$\mathcal{L}(D) \supsetneq \mathcal{L}(D - P) \supsetneq \mathcal{L}(D - P - Q).$$

Wegen $\mathcal{L}(D - P - Q) = \mathcal{L}(D - P) \cap \mathcal{L}(D - Q)$, bedeutet dies auch, dass $\mathcal{L}(D - P) \neq \mathcal{L}(D - Q)$ ist. Die Abbildung ist also injektiv. \square

Korollar: Jede kompakte Riemannsche Fläche ist in einen projektiven Raum einbettbar!

Beweis: Nimm einen Divisor D mit $\text{Grad } D \geq 2g + 1$. Dann ist $\text{Grad}(D - P - Q) \geq 2g - 1$ und mit Riemann-Roch $\ell(D - P - Q) = \ell(D) = 2$, weil den Roch-Term $\ell(K - (D - P - Q)) = 0$ verschwindet. \square

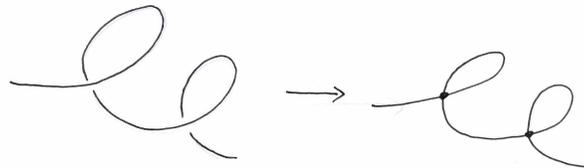
Ist auch $\ell(D - 2P) = \ell(D) - 2$ (also der Fall $P = Q$), so kann man zeigen, dass auch

$$T_P X \hookrightarrow T_P \mathbb{P}^n$$

ist. Die Abbildung φ_D ist dann eine Einbettung von komplexen Mannigfaltigkeiten.

Korollar:

- i) Jede Riemannsche Fläche ist in \mathbb{P}^3 einbettbar.
- ii) Jede Riemannsche Fläche ist in \mathbb{P}^2 immersierbar. Das Bild ist dann eine algebraische Kurve mit gewöhnlichen Doppelpunkten.



Satz von CHOW

Jede komplexe Untermannigfaltigkeit $Y \subset \mathbb{P}^n$ ist eine algebraische Varietät, d. h. $\exists F_1, F_2, \dots, F_m$ homogene Polynome

$$Y = V(F_1, F_2, \dots, F_m) \subset \mathbb{P}^n$$

26. Vorlesung,
Freitag,
10.2.2012 (8-10
Uhr)

(4.3) Ebene algebraische Kurven Wir gehen auf den Fall von Kurven in \mathbb{P}^2 etwas tiefer ein. Die Punkte der projektive Ebene \mathbb{P}^2 werden mit homogenen Koordinaten $(x : y : z)$ angegeben. Jeder Punkt mit $z \neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung mit letzter Koordinate = 1:

$$(x : y : z) = (x/z : y/z : 1)$$

Durch die Einbettung

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2, (x, y) \mapsto (x : y : 1)$$

können wir \mathbb{P}^2 als Kompaktifizierung von \mathbb{C}^2 auffassen. Die Punkte von \mathbb{P}^2 welche nicht zu \mathbb{C}^2 gehören sind also genau die Punkte mit $z = 0$. Von \mathbb{C}^2 aus gesehen sind diese Punkte "unendlich weit weg". Deshalb nennt man

$$L_\infty := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid z = 0\}$$

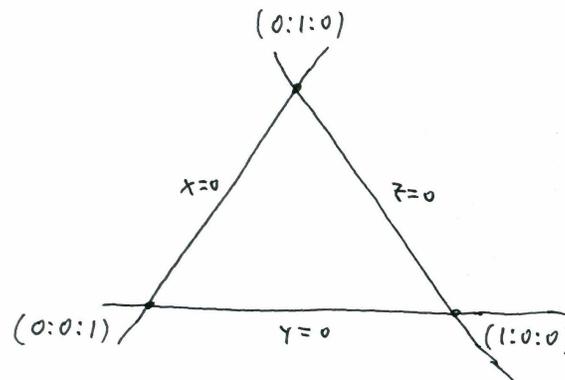
auch die *Gerade im Unendlichen*. In Wirklichkeit ist diese Gerade aber nicht anders als jede andere Gerade: durch lineare Transformation in x, y, z kann jede Gerade in jede andere Gerade überführt werden. \mathbb{P}^2 wird von drei Kopien von \mathbb{C}^2 überdeckt, die standard *Koordinaten-Karten*:

$$xy - \text{Karte} : (x, y) \mapsto (x : y : 1)$$

$$yz - \text{Karte} : (y, z) \mapsto (1 : y : z)$$

$$xz - \text{Karte} : (x, z) \mapsto (x : 1 : z)$$

Es ist nützlich die Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ mit Hilfe des *Koordinaten-Dreiecks* darzustellen. Die unendliche Gerade $z = 0$ wird dabei ins endliche gezeichnet und fungiert als *Horizont*.



Homogene Polynome und Projektive Kurven

Wir notieren

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[X, Y, Z]_d &= \{\sum_{i+j+k=d} a_{ijk} X^i Y^j Z^k\} \\ &= \{F \in \mathbb{C}[X, Y, Z] \mid F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^d F(X, Y, Z)\}\end{aligned}$$

Die *projektive Kurve* zu $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_d$ ist die Menge

$$\mathcal{C} = \mathcal{V}(F) = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Wir können F immer als

$$F = F_1^{n_1} F_2^{n_2} \dots F_r^{n_r}$$

mit F_i irreduzibel darstellen. Es ist dann

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_r$$

wobei $\mathcal{C}_i = \mathcal{V}(F_i)$. Die \mathcal{C}_i heissen die *irreduzible Komponenten* von \mathcal{C} . Das Polynom F_i wird (bis auf eine Konstante) durch \mathcal{C}_i bestimmt und das Polynom

$$F_1 F_2 \dots F_r$$

heisst *reduzierte Gleichung* für \mathcal{C} .

Homogenisieren und Dehomogenisieren

Ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ können wir als Summe seiner homogenen Bestandteilen schreiben

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$$

wobei

$$f_k \in \mathbb{C}[X, Y]_k$$

ist. Das Polynom

$$\begin{aligned}F := f^H : &= f_0 Z^d + f_1 Z^{d-1} + \dots + f_f \\ &= Z^d f(X/Z, Y/Z) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_d\end{aligned}$$

heisst die *Homogenisierung* von f (bez. Z).

Ist $F = \mathbb{C}[X, Y, Z]_d$ ein homogenes Polynom, so ist

$$f = f^D = F(X, Y, 1) \in \mathbb{C}[X, Y]_{\leq d}$$

die *Dehomogenisierung* von F . Offensichtlich ist

$$(f^H)^D = f,$$

aber $(F^D)^H$ ist nicht immer dasselbe wie F : ist $F = Z(X + Y + Z)$, so ist $F^D = (X + Y + 1)$ und $(F^D)^H = X + Y + Z$. Überlege, dass aber immer

$$F = Z^e (F^D)^H$$

für ein geeignetes e ist.

Projektiver Abschluss

Ist $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ und $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ eine affine algebraische Kurve, so heisst

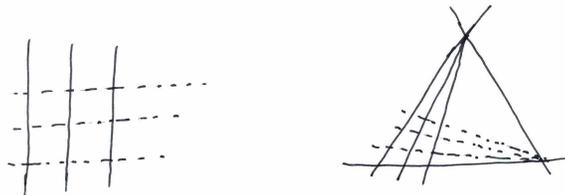
$$\bar{C} := \mathcal{V}(f^H) \subset \mathbb{P}^2$$

der *projektive Abschluss* von C . Wenn wir $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$, $F = f^H = f_0 Z^d + \dots + f_d$ schreiben, dann sehen wir, dass die Lösungen von $F = 0, z = 0$ und $f_d = 0, z = 0$ übereinstimmen. Also ist der Schnitt von \bar{C} mit der unendlichen Gerade $\{z = 0\}$ genau

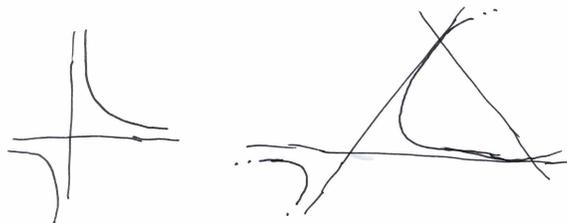
$$\{(x : y : 0) \mid f_d(x, y) = 0\}.$$

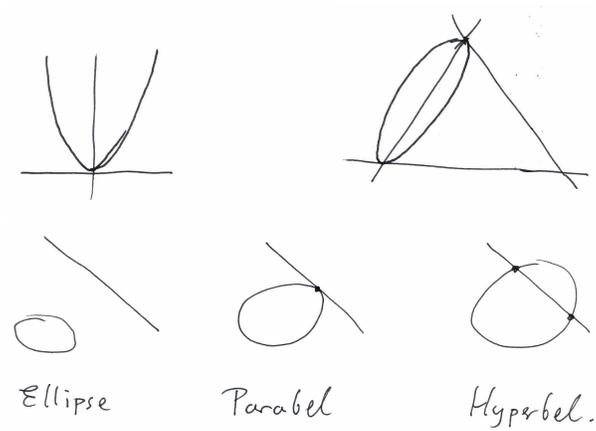
Dies sind genau die asymptotische Richtungen der affinen Kurve. Wir sehen, dass \bar{C} aus C durch Hinzunahme von endlich vielen Punkte, nämlich jeweils einer für jede asymptotische Richtung von C , entsteht.

Beispiele: 1) Geraden.

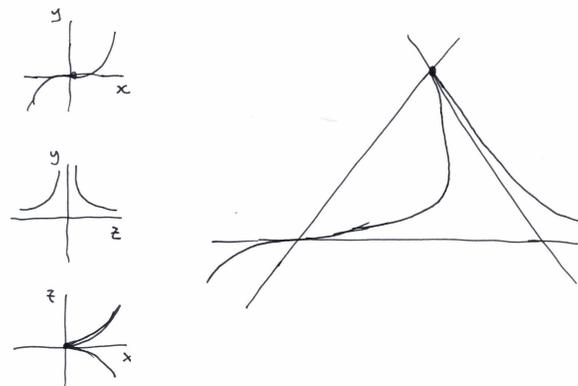


2) Kegelschnitte.





3) Eine Kubik.



Singularitäten und Tangenten

Ein Punkt $p = (a, b)$ heißt *singulärer Punkt* der affinen Kurve $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$, wenn $\partial_x f(p) = \partial_y f(p) = f(p) = 0$ ist. Ein nicht-singulärer Punkt heißt auch *regulärer Punkt*; die Kurve besitzt dann in p eine wohldefinierte Tangente, gegeben durch die Gleichung

$$l := \partial_x f(p)(X - a) + \partial_y f(p)(Y - b) = 0.$$

Für projektive Kurven bringt die homogene Schreibweise eine Vereinfachung mit sich.

Definition Ein Punkt $p \in \mathbb{P}^2$ heisst *singularärer Punkt*, oder *Singularität* von $C = \mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$, wenn

$$\partial_X F(p) = \partial_Y F(p) = \partial_Z F(p) = 0$$

gilt. Durch die *Eulerrelation*

$$X\partial_X F + Y\partial_Y F + Z\partial_Z F = d \cdot F$$

für $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_d$ sehen wir, dass die singulären Punkte auch tatsächlich auf der Kurve \mathcal{C} liegen.

Ein nicht singulärer Punkt heißt *regulärer Punkt*. Die *projektive Tangente* an \mathcal{C} in einem regulären Punkt p ist

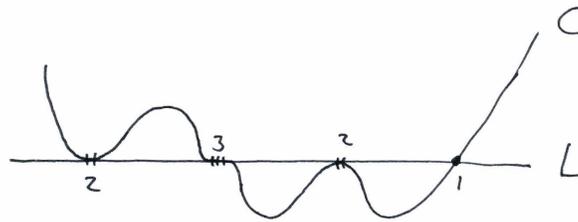
$$T_{\mathcal{C},p} = \mathcal{V}(L)$$

wobei

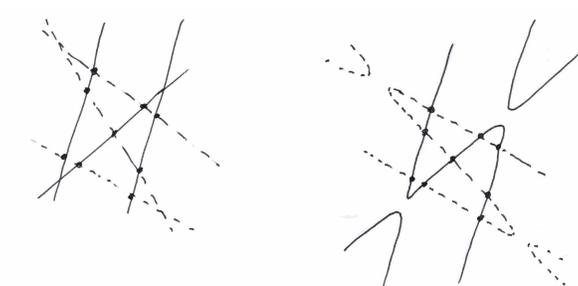
$$L = X\partial_X F(p) + Y\partial_Y F(p) + Z\partial_Z F(p)$$

ist. Es ist eine gute Aufgabe, zu zeigen dass L^D die Gleichung der Tangente an der affinen Kurve ist, und daher die projektive Tangente der projektiven Abschluss der affinen Tangente ist.

Schnitt mit einer Gerade



EULER meinte eine Kurve von Grad d zähle als d Geraden und deswegen schneiden sich zwei Kurven \mathcal{C} und \mathcal{D} in $\text{Grad}(\mathcal{C}) \cdot \text{Grad}(\mathcal{D})$ vielen Punkten.



Dies ist tatsächlich richtig, wenn man die Schnittpunkte mit einer geeigneten Vielfachheit zählt, wie Bézout in sein *Théorie générale des équations algébriques* (Paris 1779) zeigte.

Satz von Bézout

Zwei Kurven \mathcal{C} und \mathcal{D} ohne gemeinsame Komponenten schneiden sich in endlich vielen Punkten. Für $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ gibt es eine Zahl

$$i_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

so, dass

$$\text{Grad}(\mathcal{C}) \cdot \text{Grad}(\mathcal{D}) = \sum_P i_P(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

gilt. Die Zahl $i_P(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ nennen wir die *Schnittpunktmultiplizität*

Beweis: Wir wählen einen Punkt R , der nicht auf $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$ oder $\mathcal{D} = \mathcal{V}(G)$ liegt und anschliessend Koordinaten so, dass $R = (0 : 1 : 0)$ gilt und projizieren die Schnittpunkte auf die Gerade $y = 0$. Diese projizierten Schnittpunkte $(x : 0 : z)$ sind Nullstellen der *Resultante*

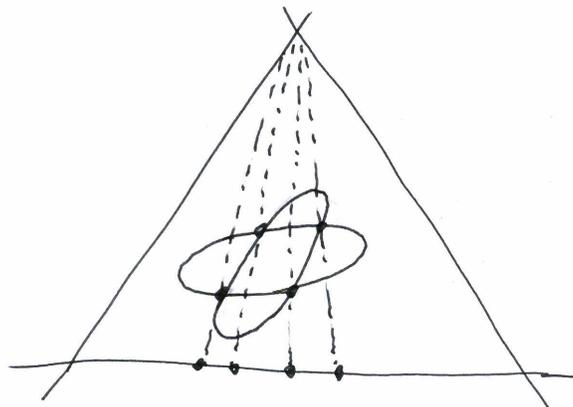
$$\text{Res}_Y(F, G) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & \dots & f_n & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_0 & f_1 & \dots & f_n \\ g_0 & g_1 & \dots & g_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_m & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_m \end{vmatrix}.$$

wo wir

$$F = f_0 Y^n + f_1 Y^{n-1} + \dots + f_n, \quad f_i \in \mathbb{C}[X, Z]_i$$

$$G = g_0 Y^m + g_1 Y^{m-1} + \dots + g_m, \quad g_i \in \mathbb{C}[X, Z]_i$$

geschrieben haben.



Da $(0 : 1 : 0)$ nicht auf \mathcal{C} oder \mathcal{D} liegt, sind $f_0, g_0 \neq 0$. Offensichtlich ist $\text{Res}_Y(F, G) \in \mathbb{C}[X, Z]_{n \cdot m}$. Wenn \mathcal{C} und \mathcal{D} unendlich vielen Schnittpunkte haben, dann muss $\text{Res}_Y(F, G)$ identisch verschwinden und es folgt, dass F und G einen gemeinsamen Faktor besitzen. Haben \mathcal{C} und \mathcal{D} hingegen endlich vielen Schnittpunkte, so konnten wir R anfangs zusätzlich außerhalb der (endliche vielen) Verbindungslinien zwischen den Paaren von Schnittpunkten wählen. Die Projektionen der Schnittpunkte auf der Gerade $y = 0$ sind dann paarweise verschieden. Wir können die Resultante als Produkt von Linearfaktoren

$$\text{Res}_Y(F, G) = \prod_P L_P^{n_P}$$

faktorisieren, wobei jeder der Linearfaktoren genau einem der Schnittpunkte entspricht. Wir definieren die Schnittmultiplizität $i_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := n_P$ als die Vielfachheit von L_P in der Resultante. Es gilt dann offensichtlich

$$\sum_P i_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = n \cdot m$$

□

Bei diesem Beweis bleibt allerdings unklar, dass die so definierte Schnittmultiplizität i_P unabhängig von den gemachten Wahlen ist, und nur von dem lokalen Verhalten der Kurven in einer Umgebung von P abhängt.



Étienne Bézout (1730-1783)

27. Vorlesung,
Mittwoch,
15.2.2012 (8-10
Uhr)

(4.4) Bézout, Clebsch und Riemann Eine glatte projektive Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche. In diesem Spezialfall können wir die Schnittmultiplizität mit einer weiteren Kurve \mathcal{D} als Verschwindungsordnung einer auf \mathcal{C} meromorphen Funktion definieren.

Definition: Die *Schnittpunkt-Multiplizität* von \mathcal{C} und $\mathcal{D} = \mathcal{V}(G)$ in $P \in \mathcal{C}$ ist

$$i_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := v_P(\phi)$$

wobei

$$\phi := G/G' \text{ mit } G'(P) \neq 0$$

und $\text{Grad}(G) = \text{Grad}(G')$ ist. Man überzeugt sich schnell, dass dies nicht von der Wahl von G' abhängt.

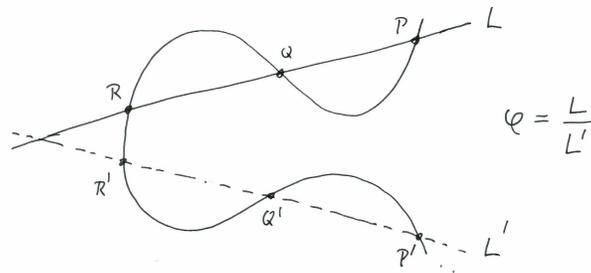
Definition: Der *Schnitt-Divisor* von \mathcal{C} und \mathcal{D} ist

$$(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} i_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) P$$

Ist $\text{Grad}(G) = \text{Grad}(G')$ und $\phi := G/G' \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, so ist

$$(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) - (\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}') = (\phi),$$

wobei $\mathcal{V}(G) = \mathcal{D}$, $\mathcal{V}(G') = \mathcal{D}'$ gilt.



$$(\phi) = P + Q + R - (P' + Q' + R').$$

Folgerung:

$$(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) \equiv (\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}').$$

Insbesondere ist also

$$\text{Grad}(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) = \text{Grad}(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}')$$

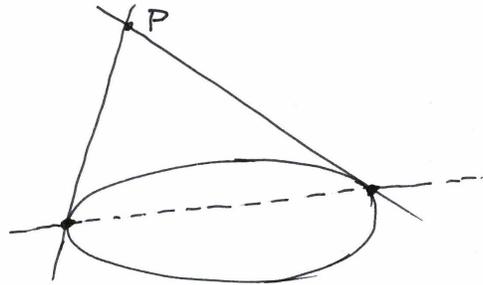
Indem wir für G' das Produkt von Linearformen wählen folgt schließlich

$$\text{Grad}(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) = \text{Grad}(\mathcal{C}) \cdot \text{Grad}(\mathcal{D}'),$$

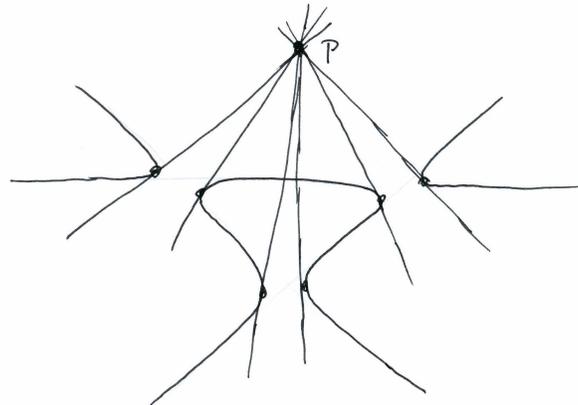
also der Satz von BÉZOUT!

Die Polare.

Die Polare eines Kegelschnitts bezüglich eines Punktes P ist die Verbindungslinie zwischen den Berührungspunkten der Tangenten des Kegelschnitts, welche durch P verlaufen.



Es stellt sich allgemeiner die Frage, wieviele Tangenten man durch einen gegebenen Punkt P an eine Kurve zeichnen kann.



An die hier gezeichnete Kubik finden wir anscheinend 6 Tangenten.

Definition: Ist $P = (a, b, c)$ und $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_d$ so heißt

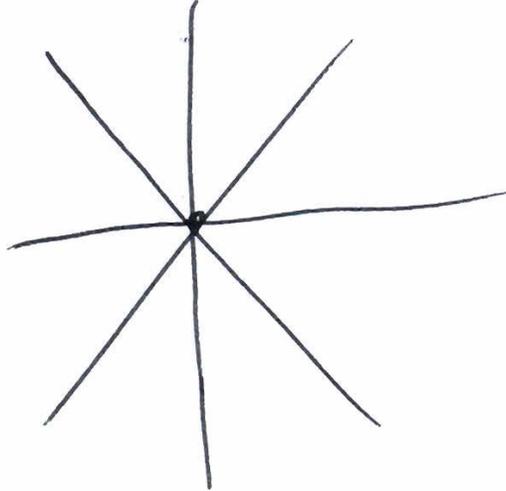
$$\nabla_P F := a\partial_X F + b\partial_Y F + c\partial_Z F$$

die *Polarform* von F bezüglich P .

Die Polarform ist also eine allgemeine Linearkombination der partiellen Ableitungen von F .

Lemma:

1) Die Polarform $\nabla_P F$ verschwindet nur dann identisch, wenn F als Produkt von Geraden durch P zerfällt. Die Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$ ist dann ein *Stern*.



2) Ist F reduziert und kein Stern, so haben F und $\nabla_P F$ keinen nicht-konstanten gemeinsamen Faktor.

Beweis: 1) Nach linearen Koordinatentransformation können wir $P = (0, 0, 1)$ voraussetzen und dann ist $\nabla_P F = \partial_Z F$. Aber $\partial_Z F = 0$ bedeutet gerade, dass $F = F(X, Y)$. Nach dem homogenen Hauptsatz der Algebra ist F ein Produkt von Linearfaktoren in X und Y .

2) Wenn F und $\partial_Z F$ ein irreduzibelen Faktor G gemeinsam haben, also $F = G \cdot H$, $\partial_Z F = G \cdot K$, dann teilt G das Polynom $\partial_Z G \cdot H$ und da $\text{Grad}(\partial_Z G) < \text{Grad}(G)$ ist auch H . Das bedeutet aber dass F von G^2 geteilt wird. \square

Definition: Ist $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F)$ eine projektive algebraische Kurve und *kein Stern*, mit F reduziert, so heißt

$$\nabla_P \mathcal{C} := \nabla_P \mathcal{F}$$

die *Polare* von \mathcal{C} bezüglich P .

Proposition: Für eine glatte Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ gilt

$$Q \in \nabla_P \mathcal{C} \cap \mathcal{C} \Leftrightarrow p \in T_Q \mathcal{C}$$

Beweis: $Q \in \nabla_P \mathcal{C} \cap \mathcal{C}$ bedeutet gerade

$$\nabla_P F(Q) = F(Q) = 0.$$

Dies bedeutet aber genau, dass P auf der Tangente an \mathcal{C} in Q liegt. \square

Wir folgern hieraus den

Satz über die Polare

Durch einen Punkt P lassen sich (mit Vielfachheit gezählt)

$$d(d-1)$$

Tangenten an einer glatten Kurven ziehen. Die $d(d-1)$ Berührungspunkten liegen auf einer Kurve von Grad $d-1$, nämlich der Polaren von C bezüglich P .

Ein weitere Folgerung ist folgende sehr nützliche Formel

Formel von Riemann-Clebsch

Die Riemannsche Fläche zu einer glatte Kurve $C \subset \mathbb{P}^2$ von Grad d hat Geschlecht

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Beweis: Wir wählen einen Punkt P ausserhalb von C und eine beliebige Gerade $L \approx \mathbb{P}^1$, die nicht durch P verläuft. Wir erhalten durch Projektion von P auf L eine holomorphe Abbildung

$$\pi : C \longrightarrow L$$

Ein Punkt Q wird dabei auf den Schnittpunkt von L mit der Verbindungsgerade von P und Q abgebildet. Die Abbildung π hat Grad d , da die Kurve Grad d hat und $P \notin C$ vorausgesetzt wurde. Mit der Formel von RIEMANN-HURWITZ folgt nun

$$\chi(C) = 2 - 2g = 2d - (d-1)d = (3-d)d$$

was durch Umstellung die Formel $g = (d-1)(d-2)/2$ liefert. □.



ALFRED CLEBSCH (1833-1872)

Das Geschlecht einer glatten projektive Kurven von Grad d ist in der unterstehenden Tabelle erfasst:

d	1	2	3	4	5	6
g	0	0	1	3	6	10

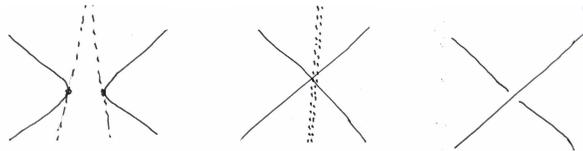
Eine Riemannsche Fläche von Geschlecht $2, 4, 5, \dots$ kann also schon auf Grund dieser Formel nicht in \mathbb{P}^2 eingebettet werden. Andererseits wissen wir, dass jede Riemannsche Fläche als Kurve mit gewöhnlichen Doppelpunkte dargestellt werden kann.

Zusatz

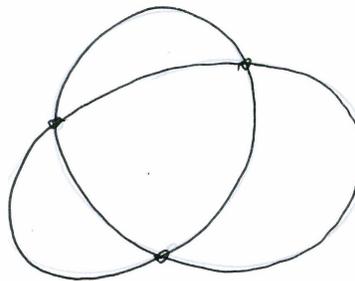
Besitzt die irreduzible Kurve C δ gewöhnliche Doppelpunkte, so hat die Riemannsche Fläche \tilde{C} das Geschlecht

$$g(\tilde{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$$

Den Beweis will ich hier nicht genau ausführen. Die Idee ist aber einfach zu erklären. Wir beobachten genau, was mit den Tangenten durch P passiert, wenn die Kurve einen gewöhnlichen Doppelpunkt entwickelt.



Man sieht, dass dann *zwei* der Tangenten durch P zu *uneigentlichen Tangenten* durch den Doppelpunkt werden. Für die Berechnung der Verzweigung der Abbildung $\pi : \tilde{C} \rightarrow L$ müssen wir also zwei Verzweigungspunkte pro Doppelpunkt abziehen und finden die obigen Formel.



Eine Quartik mit $0, 1, 2, 3$ Doppelpunkten hat somit Geschlecht $3, 2, 1, 0$, und eine Quartik mit 4 Doppelpunkten kann nicht irreduzibel sein.

(4.5) Geometrie der Divisorenklassengruppe Die Divisoren auf einer Riemannsche Fläche X , modulo lineare Äquivalenz, bilden die Divisorenklassengruppe $Cl(X)$. Die Untergruppe $Cl^0(X)$, welche aus Divisoren von Grad 0 besteht, wird mit der ABEL-JACOBI Abbildung isomorph auf den g -dimensionalen Jacobi-Torus $Jac(X)$ abgebildet

$$Cl^0(X) \longrightarrow Jac(X).$$

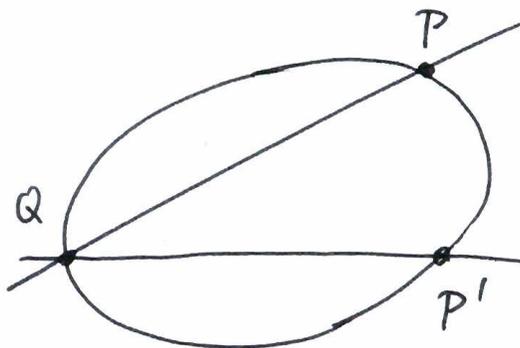
Ist $X = C$ eine glatte projektive Kurve, so haben diese Gruppen ganz hübsche geometrische Beschreibungen.

Wir fangen an mit *Quadriken*. Eine glatter Quadrik Q hat Geschlecht $g = 0$. Je zwei Punkte sind linear äquivalent. In der Tat, wenn $P, P' \in Q$ so liefern die Geraden L und L' durch P, P' und einen beliebigen weiteren Punkt $Q \in X$ die lineare Äquivalenz

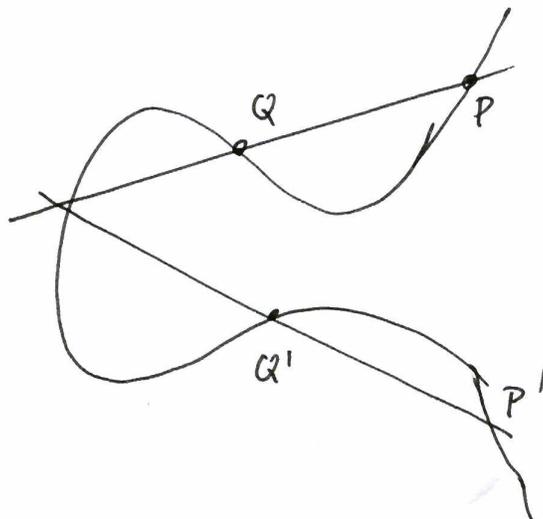
$$Q + P = C \cdot L \equiv C \cdot L' = Q + P',$$

also

$$P \equiv P'.$$



Für *Kubiken* ist dies ganz anders: eine glatte Kubik C hat Geschlecht $g = 1$. Die analoge Konstruktion

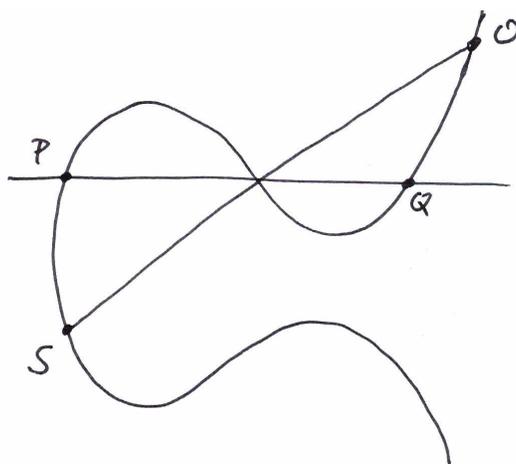


liefert jetzt

$$P + Q \equiv P' + Q',$$

aber wenn $P \neq Q$ ist, dann sind P und Q sicher *nicht* linear äquivalent zueinander (überlege warum!)

Indem wir jetzt einen Basispunkt $O \in \mathcal{C}$ wählen, finden wir



$$P + Q \equiv O + S$$

oder

$$(P - O) + (Q - O) \equiv (S - O)$$

Durch die Festlegung

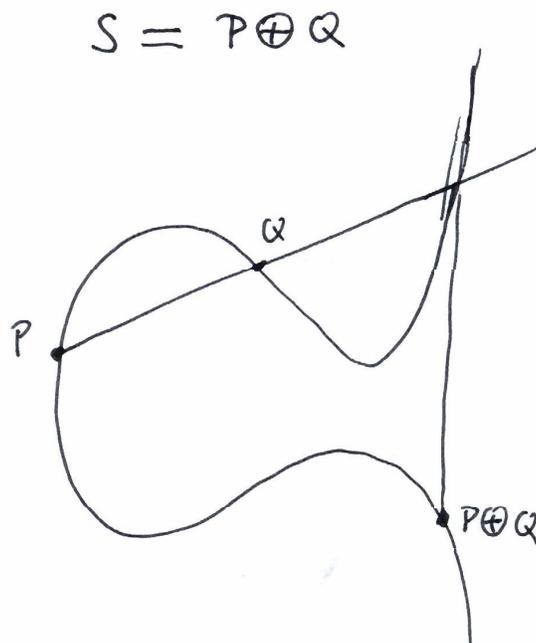
$$P \oplus Q := S$$

erhalten wir eine *Addition von Punkten* von \mathcal{C} und die Bijektion

$$\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{O\}, P \mapsto P - O$$

wird zum Isomorphismus von abelschen Gruppen.

Ist \mathcal{C} in Weierstraß-Form und $O = (0 : 1 : 0)$, so erhalten das bekannte Verfahren mittels *Verbindungslinie-und-Spiegeln-an-der-x-Achse*.



Allgemein nennt man einen Punkt P *Wendepunkt*, von \mathcal{C} , wenn

$$i_P(T_P \mathcal{C}, \mathcal{C}, P) \geq 3$$

gilt. Auf einen Kubik ist P genau dann Wendepunkt, wenn

$$T_P \mathcal{C} \cdot \mathcal{C} = 3P$$

Sind P und Q Wendepunkte von \mathcal{C} , so ist

$$3P = T_P \mathcal{C} \cdot \mathcal{C} \equiv T_Q \mathcal{C} \cdot \mathcal{C} = 3Q$$

also finden wir

$$3(P - Q) \equiv 0$$

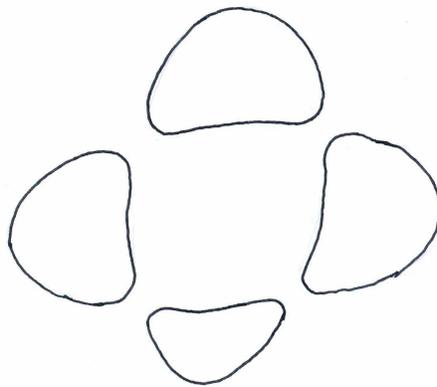
Wenn wir unseren Basispunkt $O = Q$ wählen, so sehen wir dass P genau dann ein Wendepunkt von \mathcal{C} ist, wenn $P - O$ ein 3-Torsionspunkt in $Cl^0(\mathcal{C}) = Jac(\mathcal{C}) = \mathbb{C}/\Gamma$ ist. Es gibt also immer 9 Wendepunkte!

Überlege, dass die Verbindungs-Linie zweier Wendepunkte die Kubik in einem weiteren Wendepunkt schneidet. Insgesamt erhalten wir so 12 Geraden und somit eine Konfiguration von 9 Punkte und 12 Geraden; auf jede Gerade liegen drei der Punkte; durch jeden der neun Punkte gehen vier der Geraden. Mann nennt dies die *Hesse-Konfiguration*



LUDWIG OTTO HESSE (1811-1874)

Wir wenden uns jetzt glatten *Quartiken* X zu.

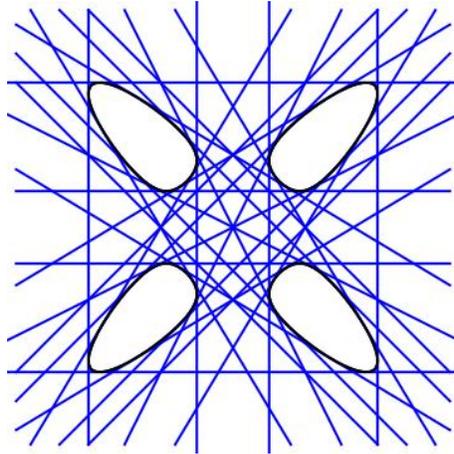


Solche Kurven wurden im 19. Jahrhundert von Mathematikern wie PLÜCKER und HESSE ausführlich untersucht.



JULIUS PLÜCKER (1801-1868)

Die 28 Bitangenten einer solchen Kurve bilden eine besondere Konfiguration



Wir wählen einen beliebigen Basis-Divisor B bestehend aus 3 Punkten von X . Ein beliebiger Divisor von Grad 0 ist linear äquivalent zu einem Divisor der Form

$$P_1 + P_2 + P_3 - B.$$

Insbesondere können wir

$$P_1 + P_2 + P_3 - B + Q_1 + Q_2 + Q_3 - B$$

in dieser Form schreiben. Wie geht das?

Wähle eine Kubik C durch $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$. Es ist dann

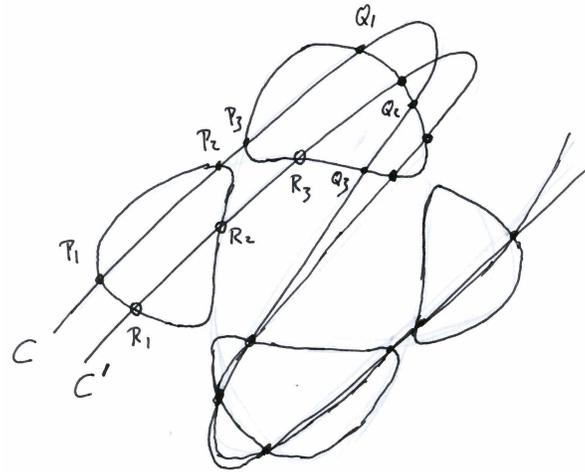
$$X \cdot C = P_1 + P_2 + P_3 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \text{Rest}$$

wobei Rest aus den restlichen $4 \cdot 3 - 3 - 3 = 6$ Punkten besteht. Wähle nun eine weitere Kubik C' durch die neun Punkten Rest und B . Wir haben dann

$$X \cdot C = R_1 + R_2 + R_3 + B + \text{Rest}$$

wobei R_1, R_2, R_3 die weiteren Schnittpunkte von C' mit X sind. Wir folgern

$$(P_1 + P_2 + P_3 - B) + (Q_1 + Q_2 + Q_3 - B) \equiv R_1 + R_2 + R_3 - B$$



Dies definiert auf geometrische Weise eine Addition von Tripeln von Punkten von X . Ist $\omega \in \Omega(X)$ ein holomorphes Differential auf X und $B = 3P$, so liefert das abelsche Theorem

$$\int_P^{P_1} \omega + \int_P^{P_2} \omega + \int_P^{P_3} \omega + \int_P^{Q_1} \omega + \int_P^{Q_2} \omega + \int_P^{Q_3} \omega = \int_P^{R_1} \omega + \int_P^{R_2} \omega + \int_P^{R_3} \omega$$

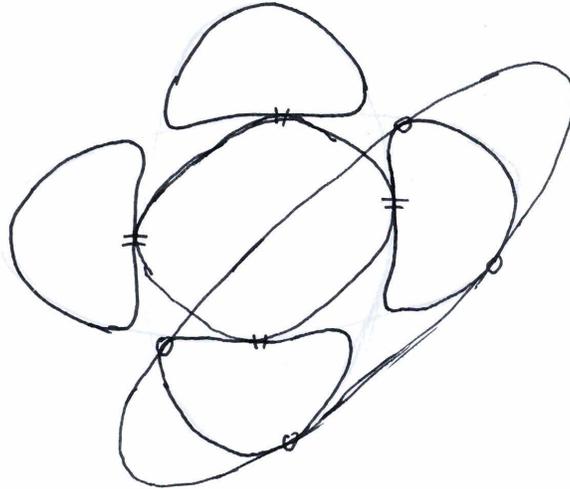
Jetzt ist also auch klar, warum die R_i algebraisch von P_i und Q_i abhängen....

Der Schnitt von X mit einer Gerade L ist ein Divisor $H = (X \cdot L)$ von Grad 4. Mit Riemann-Roch folgt

$$l(H) - l(K - H) = 4 - 3 + 1 = 2.$$

Wenn wir die Gerade L bewegen, erhalten wir eine durch \mathbb{P}^2 parametrisierte Familie von Divisoren D . Also ist $l(D) \geq 3$. Folglich muss $l(K - D) \geq 1$ sein. Da aber auch $\text{Grad}(K) = 2g - 2 = 4$ gilt, muss $K \equiv H$ sein. Anders gesagt: Geraden schneiden auf X kanonische Divisoren aus! Ausserdem folgt $l(H) = 3$ (und $l(K - H) = 1$), dass heisst: diese Schnitten $(X \cdot L)$ bilden das vollständige Linearsystem $|X \cdot L|$.

Ein allgemeiner Kegelschnitt C schneidet X in 4.2 verschiedenen Punkten. HESSE und PLÜCKER beschreiben die Systeme von Kegelschnitten C , die X überall berühren. Von *Berührung* spricht man, wenn die 4.2 = 8 Schnittpunkte von X und C in Paare zusammen fallen.



Ist D der Divisor D welcher aus den vier Kontaktpunkten besteht, so können wir

$$X \cdot C = 2D$$

schreiben. Eine besondere Lösung entsteht, wenn wir für C eine doppelt zählende Gerade L nehmen. Der Schnittdivisor ist dann $2H$, wobei $H := X \cdot L$ ist. Für die weiteren Berührdivisoren D gilt dann

$$2D \equiv 2H$$

oder

$$2(D - H) \equiv 0$$

Dies besagt, dass $D - H$ ein 2-Torsionspunkt in $Cl^0(X)$ ist. Da aber $Cl^0(X) \approx Jac(X)$ und da allgemein $Jac(X) \approx (\mathbb{C}^g/\Gamma) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$ ist, gibt es $2^{2g} = 2^6 = 64$ 2-Torsionspunkte. Wir finden also 63 Divisorenklassen $D \neq H$ mit $2(D - H) = 0$. Aus Riemann-Roch folgt $l(D) = 2$, da $l(K - D) = 0$. Die 63 Divisorenklassen bewegen sich jeweils in ein \mathbb{P}^1 . Somit besitzt eine glatte Quartik 63 Systeme von Kontaktkegelschnitten....